Četiri su dovoljne!

Sandra Gračan, Zagreb

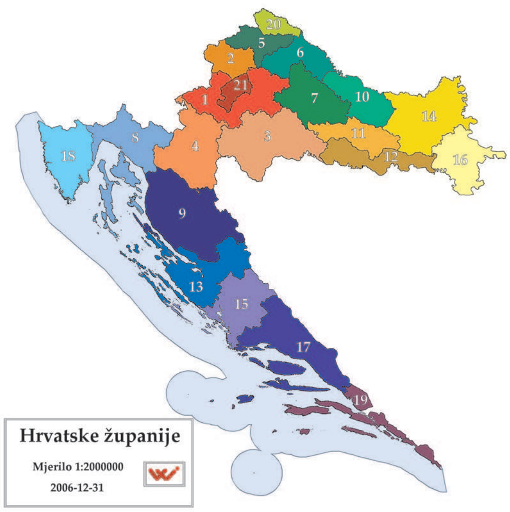
Čak 150 godina je niz amatera, rješavatelja puzzli, ali i profesionalnih matematičara pokušavalo riješiti problem vezan uz bojenje zemljopisnih karata. Prava je rijetkost da jedan matematički zadatak izazove toliku pažnju šire javnosti. Kakve veze uopće imaju zemljopisne karte, boje i matematika, pročitajte u ovom prikazu zanimljive knjige Robina Wilsona: Four Colours Suffice.

Problem?!

Zamislite da pred sobom imate zemljopisnu kartu koja prikazuje regije na koje je podijeljena određena država ili pak države nekog kontinenta. Prirodno je da susjedne države na toj karti budu obojene različitim bojama. Bez obzira na to kako karta izgleda, od koliko se država sastoji i kakvog su one oblika, četiri različite boje bit će sasvim dovoljne da se ta karta oboji na željeni način. Pokazalo se da ovu jasnu i jednostavnu tvrdnju nije bilo jednostavno dokazati.

Problem dakle glasi ovako: može li se bilo koja karta obojiti najviše četirima bojama tako da susjedne države budu različito obojene?

Zvuči jednostavno? I dok pokušavam zamisliti, onako, na brzinu, neku imaginarnu kartu na kojoj bi ova tvrdnja odmah "pala u vodu", kroz glavu mi prolazi pomisao: kome to uopće treba? Zar samo zato da bi zemljopisne karte bile manje šarene? A što nedostaje ovoj krasnoj karti hrvatskih županija?

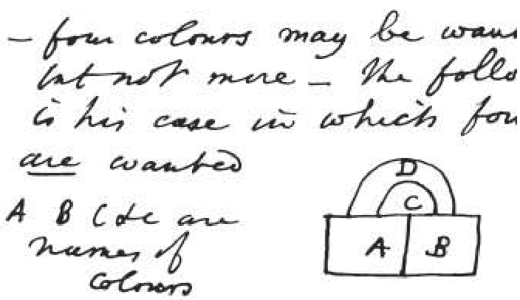


No, kao da je upravo činjenica da od tvrdnje i nema prevelike koristi djelovala kao magnet za matematičare. Svi oni, koji su problem shvatili kao zanimljivu slagalicu ili neobičnu mozgalicu koju je trebalo brzo riješiti, brzo su i odustali.

Kako je sve počelo...

Problem je prvi postavio britanski matematičar Francis Guthrie prije više od 150 godina. Guthrie je otkrio da su mu za bojenje regionalne karte Engleske dovoljne samo četiri boje, ali nije bio siguran vrijedi li tvrdnja općenito. Zamolio je svog mlađeg brata Frederica za pomoć. Frederic je u to vrijeme studirao na Sveučilištu u Londonu, pa je svom profesoru Augustusu De Morganu postavio pitanje može li dokazati tvrdnju.

De Morgana je postavljeni problem prilično zainteresirao. On 23. listopada 1852. godine piše pismo svom kolegi i prijatelju, sir Williamu R. Hamiltonu u Dublin u kojem navodi tvrdnju i daje primjer iz kojeg je očito da su četiri boje nužne. No, jesu li četiri boje uvijek **dovoljne**? Ako je odgovor na postavljeno pitanje negativan, trebalo bi pronaći protuprimjer, tj. barem jednu kartu za koju je potrebno najmanje pet različitih boja. Ako je pak tvrdnja istinita, treba dokazati da ona vrijedi za svaku, čak i "najuvrnutiju" kartu, bila ona stvarna zemljopisna karta, ili neka potpuno izmišljena.



Dio De Morganovog pisma

I De Morgan i Hamilton bili su ugledni britanski matematičari i redovito su se dopisivali više od 30 godina. No, Hamiltona **problem četiriju boja** uopće nije zanimao. Prilično razočaran time, De Morgan piše i drugim kolegama, a u travnju 1860. ga po prvi puta objavljuje u književnom časopisu *Athenaeum*. Tako za njega doznaju i matematičari s druge strane Atlantika. Priča kaže da se američki matematičar, filozof i logičar Charles Sanders Pierce "zarazio" problemom, mjesecima ga je pokušavao riješiti, a navodno ga je i riješio, samo što njegov dokaz nikad nije objavljen.

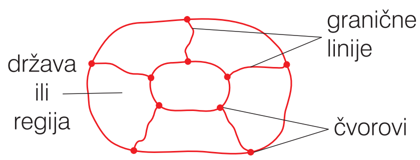
Preciznija definicija problema

Formulira li se gornje pitanje u obliku teorema, odmah "dobiva na težini", zar ne? Evo kako to radi struka.

Teorem o četiri boje. *Svaka karta može se obojiti najviše četirima bojama tako da su susjedne države obojene različito.*

Tvrdnja mora biti istinita za svaku kartu, bez izuzetaka. No, što kažu matematičari, što je zapravo karta? Kako zadani problem prevesti na matematički jezik? Glavni "alat" kojim će se problem rješavati bit će teorija grafova.

Karta je cjelina koja se sastoji od međusobno povezanih država ili regija. Granica svake države zatvorena je krivulja koja se može podijeliti na onoliko dijelova — **graničnih linija** ili **bridova**, koliko ta država ima susjeda. Dvije države sa zajedničkim bridom nazivaju se **susjedne države**.



Bridovi se sastaju u **vrhovima** ili **čvorovima**. Pretpostavit ćemo da se u svakom čvoru sastaju najmanje tri brida, a dodiruju li se dvije države samo u jednoj točki, tada se smiju obojiti istom bojom.

Cayleyjev početak

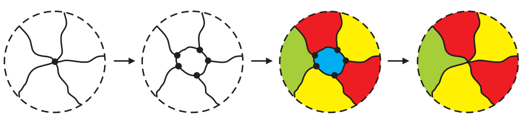
Nakon De Morganove smrti 1871. g., problem četiriju boja na neko vrijeme pada u zaborav, sve dok ga 13. 6. 1878. g. na uglednom sastanku Londonskog matematičkog društva, Britanac Arthur Cayley nije ponovno postavio.

Arthur Cayley bio je izvrstan student matematike i ponio je titulu najmlađeg profesora na Cambridgeu u cijelom 19. stoljeću. Cayley se iskreno zainteresirao za problem četiriju boja i 1878. godine objavljuje prvi članak o njemu i to (sasvim razumljivo) u geografskom, a ne matematičkom časopisu. U članku priznaje da nije uspio dokazati Teorem, ali dolazi do nekoliko za dokaz važnih zaključaka.

Arthur Cayley

Cayley je najprije dokazao sljedeće: ako je proizvoljna karta, koja se sastoji od n država, već obojena s četiri boje i ako toj karti dodamo jednu državu, tada se i nova karta od n+1 država može obojiti četirima bojama.

Drugo, Cayley je zaključio kako je dovoljno promatrati samo karte kod kojih se u svakom čvoru dodiruju točno tri države, tzv. kubne karte. Naime, ako se u nekom čvoru susreće više od triju država, tada se na taj čvor postavi mala kružna "zakrpa", oboji se tako dobivena kubna karta, a zatim se zakrpa jednostavno ukloni.



I treće, ako je Teorem o četiri boje istinit, tada se bojenje karata uvijek može izvesti na takav način da se sve države koje leže uz rub karte mogu obojiti najviše trima bojama.

Matematička indukcija

Prvi zaključak usmjerio je Cayleya na dokaz metodom matematičke indukcije. Za $n = 1, 2, 3$ i 4 tvrdnja je trivijalna. Dokazati korak indukcije (iz pretpostavke da se sve karte s n država mogu obojiti najviše četirima bojama slijedi da se i sve karte s n+1 država mogu obojiti najviše četirima bojama), značilo bi dokazati Teorem. Tada bi iz očite tvrdnje za $n = 4$ slijedilo da Teorem vrijedi i za $n = 5$, ako vrijedi za sve karte s 5 država, vrijedio bi i za sve karte sa 6 država, itd. Dakle, tvrdnja bi vrijedila općenito za sve karte.

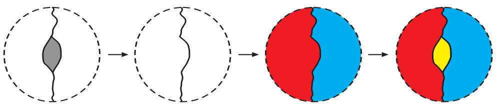
Ali, postoji bezbroj načina na koje se nekoj karti može dodati još jedna država. Kako odrediti kojom bojom treba obojiti tu dodanu državu? U nekim situacijama je to lako, bojenje nove države izvodi se direktno bez ikakve promjene boja prethodno obojenih država. No, sigurno ima slučajeva kad to nije jednostavno jer je potrebno promijeniti boju cijelom nizu prethodno obojenih država.

Kontradikcija

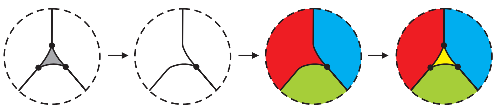
Bilo je vrlo teško pronaći metodu za proširenje karte s n na n+1 država koja bi vrijedila općenito. Zato je Cayley rješavanju problema pokušao prići na drugi način: metodom kontradikcije.

Zamislimo da je Teorem lažan i da postoje neke karte koje se ne mogu obojiti samo četirima bojama. Među svim takvim **uljezima** za koje je potrebno 5 ili više boja, izaberimo onu s najmanjim brojem država. Nazovimo je **najmanjim uljezom**. Tada vrijedi sljedeća tvrdnja: najmanji uljez ne može se obojiti četirima bojama, ali svaka karta s manjim brojem država **može**. Dokazati Teorem o 4 boje, sada znači dokazati da najmanji uljezi ne postoje.

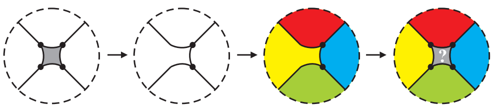
Lako se može dokazati da najmanji uljez ne sadrži *dvokut* — državu koja ima samo dva susjeda. Naime, uklonimo li takvoj državi jedan brid, do-bit ćemo kartu s jednom državom manje, koja se može obojiti najviše četirima bojama. Vratimo li uklonjeni brid, nije nikakav problem odrediti boju za državu s dvama susjedima, jer su nam od 4 na raspolaganju čak dvije boje.

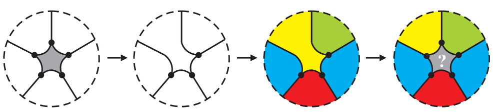


Na sličan način dokazuje se da najmanji uljez ne može sadržavati niti jedan *trokut* — državu s trima susjedima. Pretpostavimo suprotno, uklonimo jedan brid i od 4 dobijemo 3 države. Takva karta se može obojiti četirima bojama, za 3 države potrošimo 3 boje, vratimo uklonjeni brid i državu obojamo preostalom, četvrtom bojom.



No, već u sljedećem koraku metoda uklanjanja i vraćanja brida pada u vodu. Promatramo li države s 4, 5 ili više bridova, taj postupak očito više ne vrijedi.





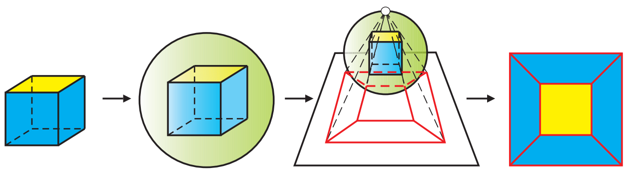
Cayley je tu zapeo. No, u pomoć priskače čuveni Leonhard Euler. Zahvaljujući njegovom proučavanju poliedara i zaključcima do kojih je došao stotinjak godina ranije, dokaz je ipak mogao napredovati.

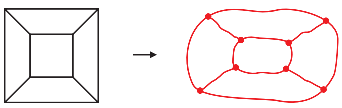
Karte i Eulerovi poliedri

Eulerovo bavljenje poliedrima i njegova čuvena formula za poliedre:

broj strana – broj bridova + broj vrhova = 2

odigrali su važnu ulogu u dokazivanju problema četiriju boja. Pitate se kakve veze imaju karte i poliedri? Veza postoji i lako se uočava projiciramo li poliedar iz jedne točke na ravninu. Na taj način možemo dobiti ravninsku projekciju bilo kojeg poliedra, a Eulerova formula i dalje vrijedi.





Zamislimo li da strane poliedra predstavljaju države, da su bridovi poliedra zapravo granice država, a vrhovi poliedra čvorovi, te ubrojimo li i vanjštinu projekcije kao jednu državu, tada Eulerova formula vrijedi i za tako dobivene karte i glasi ovako:

broj država – broj bridova + broj čvorova = 2

Obratno, svaku kubnu kartu možemo nacrtati na sferi i onda zamisliti da ona predstavlja neki poliedar. Pritom je problem bojenja sferne karte jednak problemu bojenja karte na ravnini - sasvim je svejedno ubrajamo li i vanjštinu karte kao još jednu regiju koju treba obojiti ili ne.

Direktna posljedica Eulerove formule je tzv. formula prebrajanja. Pretpostavimo li da karta ima d_2 država koje imaju točno 2 susjeda, d_3 država koje imaju točno 3 susjeda, d_4 država s točno 4 susjeda, itd., tada je ukupan broj država na toj karti (računajući i vanjštinu karte)

$$D = d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + \dots .$$

Zatim prebrajamo bridove, a kako svaki brid pripada točno dvjema državama, slijedi:

$$2B = 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + 6d_6 + \dots ,$$

odnosno

$$B = d_2 + \frac{3}{2}d_3 + 2d_4 + \frac{5}{2}d_5 + 3d_6 + \dots .$$

I na kraju, s obzirom da promatramo kubne karte, tj. da se u svakom čvoru sastaju točno tri države, tada za broj vrhova V vrijedi:

$$3V = 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + 6d_6 + \dots$$

odnosno

$$V = \frac{2}{3}d_2 + d_3 + \frac{4}{3}d_4 + \frac{5}{3}d_5 + 2d_6 + \dots .$$

Uvrstimo li gornje izraze u Eulerovu formulu i sredimo li je, dobivamo formulu prebrajanja za kubne karte:

$$4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5 - d_7 - d_8 - 3d_9 - \dots = 12,$$

Iz formule se vidi da za kubnu kartu barem jedan od brojeva d_2, d_3, d_4 i d_5 mora biti veći od 0. Drugim riječima, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem "samo 5 susjeda". *Svaka kubna karta ima barem jednu državu s 5 ili manje susjeda.*

Osim toga, ako karta ne sadrži niti jedan *dvokut*, niti jedan *trokut* i niti jedan *kvadrat*, tada mora sadržavati barem 12 *peterokuta*.

Na sličan se način može zaključiti i sljedeće: ako se kubna karta sastoji isključivo od *peterokuta* i *šesterokuta*, tada ona mora imati točno 12 *peterokuta*.

I konačno, iako Arthur Cayley nije uspio dokazati da najmanji uljezi ne postoje, njegova ideja ipak se pokazala korisnom: mogla se dokazati nešto slabija tvrdnja, Teorem o šest boja.

Teorem o šest boja. *Svaka karta može se obojiti sa šest boja tako da susjedne države budu obojene različito.*

Kempe rješava problem!

A sve to uspio je shvatiti, povezati i dobro proučiti londonski odvjetnik i matematičar amater Alfred Bray Kempe. Kempe je čuo za problem četiriju boja 1878. godine. Iako je diplomirao pravo 1872. godine, bio je strastveni zaljubljenik u matematiku te je bio prisutan na sastanku Londonskog matematičkog društva kada je Arthur Cayley govorio o problemu.

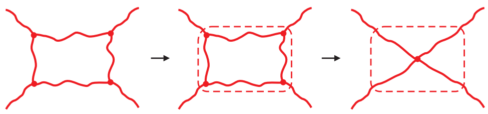
I samo godinu dana kasnije imao je njegovo rješenje!

Alfred Bray Kempe

Ideju svog dokaza Kempe je objavio sredinom 1879. godine u časopisu *Nature*, a krajem iste godine objavljuje cijeli dokaz u časopisu *American Journal of Mathematics*.

Uzimajući u obzir sve dosad navedene zaključke, Kempeova metoda bojenja bilo koje karte može se opisati u šest koraka:

1. pronaći na karti državu koja ima 5 ili manje susjeda (po Teoremu "samo 5 susjeda", ona svakako postoji);
2. pokriti tu državu komadićem praznog papira sličnog oblika, samo malo većeg;
3. produljiti sve granice koje dodiruju "zakrpu" tako da se sastanu u jednoj točki na papiriću — kao da se odabrana država smanjila u jednu točku — time se broj država na karti smanjio za 1;



4. ponavljati tri prethodna koraka sve dok se početna karta ne smanji do karte s točno jednom državom;
5. obojiti jednu državu bilo kojom od 4 dane boje;
6. obrnuti gornji proces: skidati "zakrpe" unatrag sve dok se ne dobije početna karta i pritom svaku "vraćenu" državu obojiti tako da se razlikuje od susjeda!

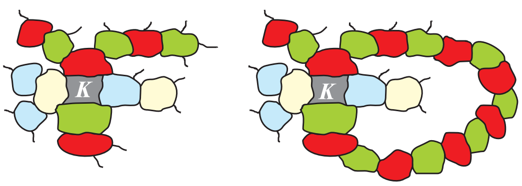
No, hoćemo li uvijek moći odrediti boju za "vraćenu" državu? Problem, na kojem je zapeo i Arthur Cayley nastaje ako država koju treba obojiti ima 4 ili 5 susjeda, dakle ako je to kvadrat ili peterokut.

Evo kako je Kempe riješio taj problem.

Kempeovi lanci

Pretpostavimo najprije da je država za koju treba odrediti boju *kvadratnog* oblika, dakle ima 4 susjedne države. Odaberu se one dvije države koje se međusobno ne dodiruju. Neka su to na primjer crveni i zeleni susjedi države K.

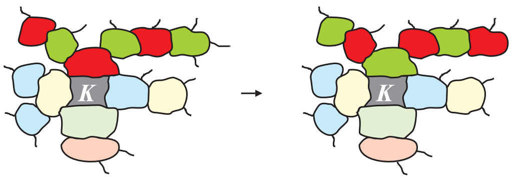
Svaka od tih dviju država započinje jednu ili više crveno-zelenih grana — dijelova karte koji se sa-stoje od niza država obojenih crveno ili zeleno. Mogu nastati dvije situacije.



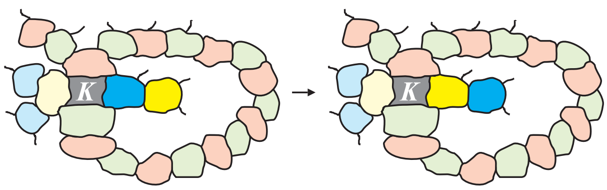
1. slučaj

2. slučaj

U prvom slučaju niti jedna grana koja počinje crvenim susjedom od K nije povezana s donjom zelenom državom. Tada se crveni susjed države K može obojiti u zelenu boju i sve države u crveno-zelenim granama mogu zamijeniti boje. Tada nam za državu K ostaje na raspolaganju crvena boja.

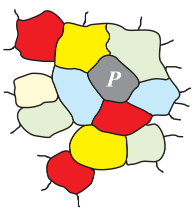


U drugom slučaju, kad jedna od grana koje započinju s crvenim susjedom države K završava sa zelenim susjedom države K, zamjenom boja ništa ne dobivamo. No, uočimo da lanac zapravo čini zatvorenu petlju: počinje i završava u K. Sada prebacimo pažnju na druga dva susjeda: plavog i žutog. Uočimo da se niti jedan lanac jednog od tih dvaju susjeda ne može nadovezati na neki od lanaca drugog susjeda jer ih prekida ranije uočena petlja. Sada zapravo imamo situaciju kao u prvom slučaju: obojimo li plavog susjeda u žuto te cijeloj plavo-žutoj grani zamijenimo boje, za državu K preostaje nam plava boja.

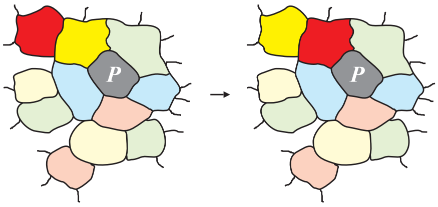


Time smo završili bojenje karte kad država, s koje je uklonjena "zakrpa", ima 4 susjeda. Zapravo smo dokazali da niti jedan najmanji uljez ne sadrži *kvadrat*.

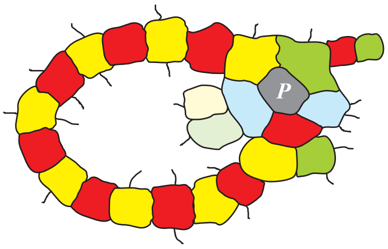
Kempe je zatim svu pažnju usmjerio na slučaj kad je "vraćena" država *peterokut* P. Peterokut okružuje 5 država već obojenih četirima bojama. Sličnim načinom razmišljanja, Kempe odabire dva susjeda od P koji se ne dodiruju: neka su to žuti i crveni susjed iznad i ispod P kao na slici:



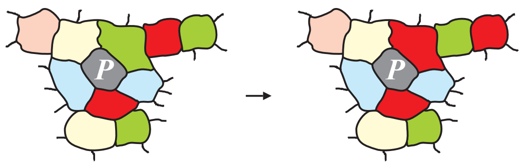
Ako gornje žuto-crvene grane nisu povezane s donjim granama, tada im se boje mogu zamijeniti, pa žuti susjed od P može postati crven, ostavljajući time žutu boju na raspolaganju za P.



No, ako je žuto-crveni lanac s gornje strane povezan s crveno-žutim lancem ispod P, tada Kempe uočava zelenog susjeda i promatra crveno-zelene i zeleno-crvene grane.

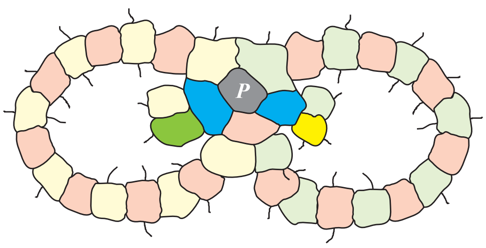


Ako gornji zeleno-crveni niz nije povezan s donjim crveno-zelenim, zeleni susjed od P može postati crveni i cijeli gornji niz smije promijeniti boje u crveno-zelene.

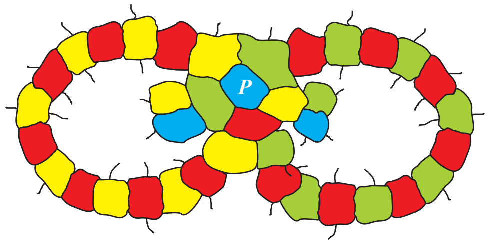


Time za P ostaje zelena boja.

Ako su pak lanci ponovo povezani, tada zajedno s prethodnim imamo dvije petlje i situaciju kao na slici:



Uočimo sada kako je plavo-žuti niz s lijeve strane države P sigurno nepovezan s plavo-žutim nizom desno od P, pa bez problema smijemo izmijeniti boje u plavo-žutom nizu s desne strane. Isto tako, plavo-zeleni lanac s lijeve strane odvojen je od plavo-zelenog lanca s desne strane, pa lancu s lijeve strane smijemo izmijeniti boje. Napravimo li istovremeno obje izmjene boja, država P imat će susjede žute, crvene i zelene boje, pa se ona može obojiti u plavo.



Time smo završili bojenje karte kad je "vraćena" država peterokut i dokazali smo da najmanji uljez ne sadrži *peterokut*. No, to je u kontradikciji s Teoremom "samo 5 susjeda", po kojem svaka kubna karta sadrži barem jednu državu s 5 ili manje susjeda, dakle Teorem je dokazan!

Ima jedna mala greška...

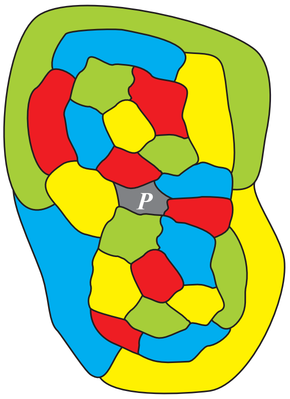
Upravo opisana metoda danas je poznata pod nazivom **metoda Kempeovih lanaca**. Zanimljiva je i sasvim lijepo dokazuje da su 4 boje dovoljne za bojenje bilo kakve karte.

E, sad, meni je tu bilo sve više-manje jasno, a vama? Jest, ali dokaz ne valja!

Naime, ovo je postao najpoznatiji pogrešan dokaz u povijesti matematike! Zavarao je većinu matematičara tog vremena i trebalo je čak 11 godina da se otkrije pogreška! A pronašao ju je ekscentrični profesor matematike iz Durhama, Percy John Heawood.

Heawood je završio dva studija na Oxfordu: matematiku te klasični studij latinskog, grčkog i hebrejskog. Još za vrijeme studija zainteresirao se za problem bojenja karata i proučavao je Kempeov dokaz. U lipnju 1890. u časopisu *Quaterly Journal of Mathematics* Heawood objavljuje članak *Map-colour Theorem* u kojem "ruši" Kempeov dokaz. Pogreška u dokazu javlja se pri samom kraju, u raspravi o određivanju boje za peterokut P: *...napravimo li istovremeno obje izmjene boja...*

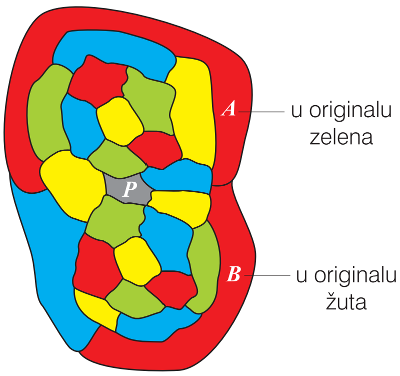
Postoje karte kod kojih nije moguće provesti iz-mjenu boja **istovremeno** u dvama različitim lan-cima. Evo jedne takve karte:



Na toj karti je svaka od dvadeset i pet država obojena crveno, plavo, žuto i zeleno osim *peterokuta* P u sredini. Karta se sigurno može obojiti samo četirima bojama, no pokazuje da je Kempeova metoda dokazivanja pogrešna.

Pokušamo li odrediti boju peterokuta P slije-deći Kempeovu logiku, izmijenit ćemo boje dvaju P -ovih susjeda.

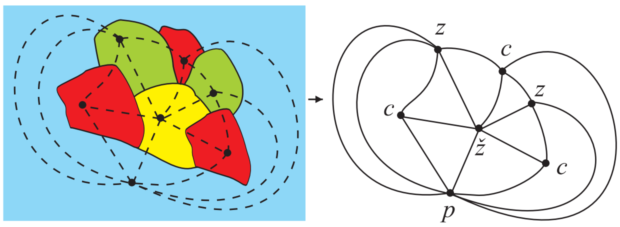
Svaka od tih dviju promjena dozvoljena je, izvodi li se sama za sebe. No, pokušamo li ih izvesti is-tovremeno, dolazi do problema jer dvije susjedne države (jedna, označena slovom A, koja je bila zelena, i druga, označena slovom B, koja je bila žuta) postaju crvene, što se ne smije dogoditi!



Alfred Kempe javno je priznao grešku, 1891. g. na sastanku Londonskog matematičkog društva. Ni Kempe ni Heawood nisu znali kako popraviti dokaz. Heawood je ipak, iskoristivši Kempeove ideje, dokazao da vrijedi Teorem o pet boja.

Teorem o pet boja. *Svaka karta može se obojiti najviše s pet boja tako da su susjedne države obo-jene različito.*

Iako po iskazu slabiji, ovaj teorem je još jedna karika u nizu koja će biti neophodna u dokazu polaznog problema. No, priču o Kempeu ćemo završiti tek kad spomenemo još jednu njegovu ideju o načinu na koji možemo razmišljati o prob-lemu. Zamislimo da se u svakoj državi na karti istakne jedna točka (kao što se npr. označava glavni grad), a zatim se točke koje predstavljaju susjedne države povežu linijama. Dobiven je graf. Problem određivanja boja pojedinih država sveo bi se sada na to da se točkama pridruže slova abecede, ali tako da susjedne točke budu različito imenovane.

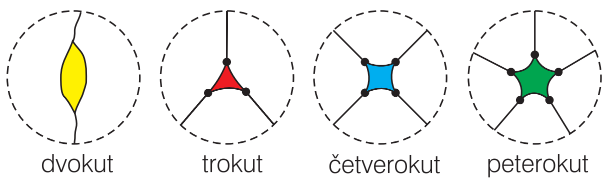


Važnost ove ideje leži u tome što se problem bo-jenja karata na ovaj način prevodi na proučavanje veza i teoriju grafova, moćan matematički alat ko-jim će problem četiriju boja napokon biti riješen. A i to tek uz pomoć računala...

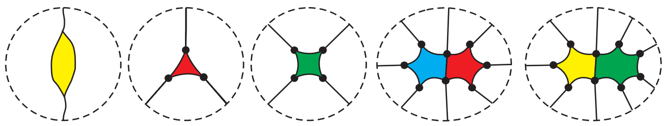
Dva smjera dokaza

Sada je postalo jasno kako naoko jednosta-van problem nije bilo nimalo jednostavno riješiti. Matematičari su se podijelili u dvije grupe: jedni su svoju pažnju usmjerili na pronalaženje **neizbježnih skupova**, a drugi na pronalaženje **reducibilnih konfiguracija**.

Još je na početku dokazano da svaka kubna karta mora sadržavati barem jednu od ova-kvih država:



Skup takvih država naziva se **neizbježni skup** — na svakoj karti mora negdje postojati barem jedna država iz tog skupa. Evo još jednog neizbježnog skupa:



dvokut | trokut | četverokut | dva peterokuta | peterokut/ šesterokut

Drugim riječima, ako kubna karta ne sadrži *dvokut*, trokut ni *kvadrat*, tada mora sadržavati *peterokut*, ali i ne samo to: ona mora sadržavati ili dva spojena *peterokuta* ili spojeni *peterokut* i *šesterokut*.

Tom idejom se krajem 19. i početkom 20. stoljeća bavio njemački matematičar Paul Wernicke. Do sredine 20. st. konstruirani su neizbježni skupovi s tisućama konfiguracija.

Drugi smjer vodio je preko proučavanja najmanjih uljeza. Prateći Kempeov dokaz i uz pomoć Teorema o dvostrukom prebrojavanju, može se zaključiti da najmanji uljez ima barem 13 država. Te države ne mogu imati manje od pet susjeda, odnosno *dvokut*, *trokut* i *kvadrat* se ne nalaze u najmanjem uljezu.

Reducibilna konfiguracija je skup država koje se ne mogu pojaviti u najmanjem uljezu.

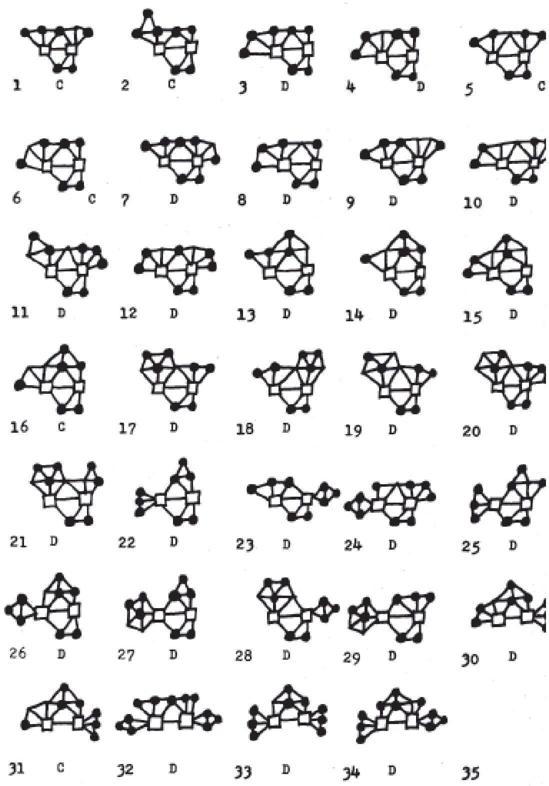
Da je Kempe uspio dokazati da je *peterokut* reducibilan, dokazao bi Teorem o 4 boje.

Uspjeh u pronalaženju reducibilnih konfiguracija dramatično se promijenio 1913. godine zahvaljujući američkom matematičaru Georgu Davidu Birkhoffu. Te godine Birkhoff u časopisu *American Journal of Mathematics* objavljuje članak *Reducibilnost karata*. On je u najmanjim uljezima proučavao čitave prstenove država i dokazivao da su reducibilni. Posao je bio prilično mukotrpan i tada sigurno ne biste željeli biti na mjestu mlade gđe Birkhoff, jer biste na svom medenom mjesecu morali crtati razne konfiguracije karata. Pogledajte jedan takav crtež na slici desno.

Šezdesetih godina 20. st. pokušaji pronalaženja neizbježnih skupova i reducibilnih konfiguracija odvijali su se još uvijek odvojeno i bili su međusobno neovisni. Tada na scenu stupa njemački matematičar Heinrich Heesch (1906. – 1995.). Heeschova ideja bila je pronaći **neizbježan skup reducibilnih konfiguracija**. Pronalaženje takvog skupa dokazalo bi Teorem o četiri boje: zato jer je skup neizbježan, svaka karta mora sadržavati barem jednu od konfiguracija iz tog skupa, a kako je svaka konfiguracija reducibilna, ona se ne može nalaziti u minimalnom uljezu. To pak znači da minimalni uljezi ne postoje!

I konačno: uspjeh!

U to vrijeme započinje brzi razvoj računala. Kako bi si uvelike olakšali posao, 1965. godine Heinrich Heesch i Karl Düre prvi put koriste računalo u testiranju reducibilnosti raznih konfiguracija. Od tada ono postaje neizostavno pomagalo bez kojeg dokaz ne bi niti bilo moguće provesti.



1970. Heesch surađuje s mladim Wolfgangom Hakenom, koji je, još kao student matematike, fizike i filozofije i Heeschov učenik, čuo za problem četiriju boja i odlučio se posvetiti njegovu rješavanju. 1972. godine Haken razrađuje Heeschove ideje, odvaja se od Heescha i započinje suradnju s odličnim programerom i matematičarom Kennethom Appelom na izradi računalnog programa. Dvije godine kasnije u posao uvlače i Johna Kocha, još jednog mladog i sposobnog programera i matematičara. Njih trojica zajedno uspjeli su sastaviti program za traženje neizbježnih skupova reducibilnih konfiguracija. Pritom teorija i metode kojima su se koristili nisu bile nimalo jednostavne....

Keneth Appel i Wolfgang Haken

Haken i Appel mukotrpno su i strpljivo radili na ispitivanju, čak su u provjeravanje računalnih rezultata uključili i petero svoje djece: Dorotheu i Armina Hakena, Laurel, Petera i Andrewa Appela. Materijala je bilo toliko da je bilo gotovo nemoguće sve provjeriti ručno, ali na kraju su uspjeli!

22. srpnja 1976. godine Haken i Appel objavljuju dokaz problema temeljen na konstrukciji neizbježnog skupa od 1936 reducibilnih konfiguracija, a 1977. sva trojica objavljuju dokaz u časopisu

John Koch sa suprugom

Illinois Journal of Mathematics u kojem dolaze do neizbježnog skupa od 1482 reducibilne konfiguracije. Dokaz je objavljen u dva dijela, a uz tekst je priložen materijal na mikrofilmu s 450 stranica raznih dijagrama i detaljnih objašnjenja!

No, njihov uspjeh biva poljuljan jer 1981. godine Ulrich Schmidt otkriva pogrešku u programu. I premda se ona vrlo brzo ispravila, ipak dokaz nije bio lako prihvaćen i stalno su ga pratile loše glasine i sumnje. Zato 1986. Appel i Haken objavljuju članak detaljno opisujući svoje metode, snažno braneći dokaz i odbacujući svaku sumnju, a tri godine kasnije objavljuju i knjigu pod naslovom *Every Planar Map is Four Colorable*.

Za kraj

A skeptici i dalje postavljaju pitanje: može li se dokaz dobiven uz pomoć računala uopće prihvatiti kao pravi dokaz? Treba li stvar prepustiti računalu i vjerovati u rezultate bez mogućnosti da se svaki dobiveni rezultat ručno provjeri? Prava je šteta da dokaz nije bilo moguće provesti "čisto teoretski", kažu neki. A u početku se sve činilo tako jednostavnim, zar ne?! Što vi mislite?

Eto, ako vam se tema svidjela, znajte da se tu krije još *puno lipih stvari*.... O svemu i s puno više detalja možete pročitati u knjizi Robina Wilsona: Four Colours Suffice, u izdanju *Penguin Books,* London 2002.