Udaljenost točke od pravca i ravnine

Damjan Jovičić,
Jelena Beban-Brkić,
Zagreb

Izračunavanje udaljenosti je u praksi česta zadaća. S njom se susreću geodeti, građevinari, fizičari, pomorci, astronomi, astronauti i mnogi drugi. Unutar programa nastave analitičke geometrije izračunavanje udaljenosti točke od pravca i udaljenosti točke od ravnine spada među osnovne zadaće. Na temelju njih se rješavaju i na njih se svodi računanje udaljenosti dvaju paralelnih pravaca u ravnini i prostoru, udaljenost pravca od ravnine, udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca i slično.

Što je zajedničko tim dvjema zadaćama kada je riječ o udaljenosti točke od pravca, odnosno o udaljenosti točke od ravnine? U biti se traži točka P na pravcu/u ravnini koja je najbliža zadanoj točki. Drugim riječima, traži se minimum funkcije $d(T,P)$. Nešto malo općenitija zadaća je odrediti udaljenost dane točke od krivulje u ravnini, odnosno od plohe u prostoru. Rješenje te općenitije zadaće sadržaj je iduće leme. Ovdje pretpostavljamo da se radi o glatkim krivuljama i glatkim plohama (krivulja/ploha je glatka ako u svakoj točki ima tangentu/tangencijalnu ravninu).

Lema: *Ekstremna udaljenost dane točke od krivulje/plohe realizira se na normali krivulje/plohe koja prolazi danom točkom.*

Na osnovu gornje leme pitanje udaljenosti točke od pravca i ravnine rješava se spuštanjem normale (okomice) iz dane točke na pravac/ravninu, određivanjem njezinog nožišta na pravcu/ravnini i konačno izračunavanju udaljenosti nožišta od dane točke. U općenitijem slučaju traži se normala krivulje/plohe koja prolazi danom točkom. Ekstremna udaljenost je u tom slučaju udaljenost nožišta normale od dane točke. Pritom je zanimljivo da danom točkom može prolaziti nekoliko normala što ovisi o položaju točke u odnosu na krivulju. Tako, na primjer, točkom na osi parabole prolaze tri normale, a nožišta dviju daju minimum. Zamislimo sada da ta parabola rotira oko svoje osi. Dobivamo rotacijski paraboloid. Nije teško uočiti da će odabranom točkom na osi prolaziti beskonačno mnogo normala. Slično je pitanje: koliko normala elipse prolazi danom točkom ovisno o njezinom položaju u odnosu na elipsu?

No, vratimo se dokazu leme.

a) ravninski slučaj

Neka je dana točka $T(a,b)$ i glatka krivulja $y=f(x)$. Na krivulji tražimo točku $P(x,f(x))$, tako da $d(T,P)$ bude ekstrem.

Promatramo funkciju

$$D(x)=d^2(x)=(x-a)^2+(f(x)-b)^2 .$$

Derivacija $D'(x)=2(x-a)+2(f(x)-b)f'(x)$ se poništava ako je $x-a=-f'(x)(f(x)-b)$ tj. ako je ispunjen nužan uvjet za ekstrem.

Zapišemo li posljednju jednakost u obliku

$$f(x)-b=-\frac{1}{f'(x)}(x-a),\quad f'(x)\neq 0, \qquad \text{(i)}$$

zaključujemo da točka $T(a,b)$ leži na normali krivulje $y=f(x)$ i da je u tom slučaju točka $P(x,f(x))$ nožište. Dakle, ako postoji ekstrem, on se može postići u onoj točki krivulje čija normala prolazi danom točkom. To se u lemi i tvrdilo.

b) prostorni slučaj

Zadana je točka $T(a,b,c)$ i ploha $z=f(x,y)$. Na plohi tražimo točku $P(x,y,f(x,y))$, tako da $d(T,P)$ bude ekstrem.

U tu svrhu promatramo funkciju

$$D(x,y)=d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(f(x,y)-c)^2.$$

Njezine parcijalne derivacije su:

$$D_1(x,y)=\frac{\partial D(x,y)}{\partial x}=2(x-a)+2(f(x,y)-c)\frac{\partial f}{\partial x},$$
$$D_2(x,y)=\frac{\partial D(x,y)}{\partial y}=2(y-b)+2(f(x,y)-c)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Nužan uvjet za ekstrem zahtijeva da bude:

$$\begin{cases} D_1(x,y)=0 \\ D_2(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x=\dfrac{\partial f}{\partial x}(f(x,y)-c) \\ b-y=\dfrac{\partial f}{\partial y}(f(x,y)-c) \end{cases},$$

ili

$$\frac{a-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{b-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{c-f(x,y)}{-1},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}\neq 0. \qquad \text{(ii)}$$

Relacija (ii) znači da točka $T(a,b,c)$ leži na normali plohe $z=f(x,y)$ kojoj je točka $P(x,y,f(x,y))$ nožište. Ovime je lema u potpunosti dokazana.□

Napomena: U slučaju da nijedna normala ne prolazi danom točkom $T(a,b)\,/\,T(a,b,c)$ ili da normala ne postoji, ekstrem je moguć ali se treba tražiti na drugi način. No, kako smo naše razmatranje ograničili na slučajeve glatkih krivulja i ploha, ovdje se ne bavimo tim specijalnim slučajevima.

Slijede tri varijante izvođenja formula za udaljenost točke od pravca, odnosno ravnine. Za korištenje prve pretpostavlja se poznavanje derivacija funkcija jedne i dviju varijabli te nužnog i dovoljnog uvjeta za ekstrem. Druga varijanta počiva na dokazanoj lemi i zahtijeva znanje parametarske jednadžbe pravca. U trećoj se pretpostavlja poznavanje skalarnog produkta i definicije projekcije vektora na os zadanu vektorom. Kao četvrta varijanta može se uzeti članak Antuna Ivankovića u broju 35 časopisa MiŠ.

Varijanta 1

A: Udaljenost točke od pravca

Tražimo udaljenost točke $T_0(x_0,y_0)$ od pravca

$$p\equiv Ax+By+C=0. \qquad (1)$$

Odaberimo po volji točku $P(a,b)\in p$. To znači da vrijedi

$$Aa+Bb+C=0. \qquad (2)$$

Oduzmimo li (2) od (1) dobivamo

$$A(x-a)+B(y-b)=0. \qquad (3)$$

Jednadžbu (3) možemo zapisati u parametarskom obliku

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=t,\ \text{gdje su}\ m=-B,\quad n=A \qquad (4)$$

ili

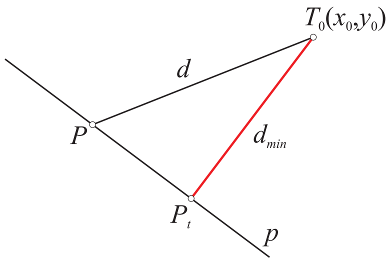
$$x=a+mt,\quad y=b+nt. \qquad (5)$$

Svaka točka pravca ima svoj parametar *t*. Jasno je da se točka $P(a,b)$ dobije za parametar $t=0$. Potražimo sada točku pravca koja je najbliža točki $T_0(x_0,y_0)$.

Izračunajmo kvadrat udaljenosti točaka $T_0(x_0,y_0)$ i $P(a+mt,b+nt)$:

$$D(t)=(x_0-(a+mt))^2+(y_0-(b+nt))^2.$$

Funkcija udaljenosti $d(t)=\sqrt{D(t)}$ poprima ekstrem u onim točkama u kojima ekstrem poprimi funkcija $D(t)$. Ta činjenica nam omogućuje jednostavnije računanje.



Slika 1-A

U svrhu traženja ekstrema funkcije $D(t)$ potrebne su nam njezina prva i druga derivacija:

$$D'(t)=-2m[x_0-(a+mt)]-2n[y_0-(b+nt)],$$

$$D''(t)=2(m^2+n^2)>0.$$

Na osnovu teorema: *u nultočkama prve derivacije funkcija ima minimum ako je u tim točkama druga derivacija pozitivna;* zaključujemo da se u našem slučaju radi o minimumu.

Riješimo li jednadžbu $D'(t)=0,$ dobivamo traženi parametar točke $P(a+mt,b+nt)$:

$$t=\frac{m(x_0-a)+n(y_0-b)}{m^2+n^2}. \qquad (6)$$

Dobili smo i više od toga, tj. koordinate točke u kojoj se postiže ekstrem, tzv. stacionarne točke. Uvrstimo li, naime, vrijednost parametra (6) u (5) dobivamo:

$$x=a+\frac{m^2(x_0-a)+mn(y_0-b)}{m^2+n^2},$$
$$y=b+\frac{mn(x_0-a)+n^2(y_0-b)}{m^2+n^2}. \qquad (7)$$

Izračunajmo sada kvadrat udaljenosti točaka $T_0(x_0,y_0)$ i $P(a+mt,b+nt)$ uvažavajući vrijednost parametra t iz (6), odnosno koordinate točke iz (7):

$$d^2=\left[x_0-a-\frac{m^2(x_0-a)+mn(y_0-b)}{m^2+n^2}\right]^2 \qquad (8)$$
$$+\left[y_0-b-\frac{mn(x_0-a)+n^2(y_0-b)}{m^2+n^2}\right]^2,$$

ili nakon jednostavne transformacije,

$$d^2=m^2\left[\frac{n(x_0-a)-m(y_0-b)}{m^2+n^2}\right]^2$$
$$+n^2\left[\frac{n(x_0-a)-m(y_0-b)}{m^2+n^2}\right]^2,$$

odnosno

$$d^2=(m^2+n^2)\left[\frac{n(x_0-a)-m(y_0-b)}{m^2+n^2}\right]^2.$$

Konačno, tražena udaljenost iznosi

$$d=\frac{|n(x_0-a)-m(y_0-b)|}{\sqrt{m^2+n^2}}. \qquad (9)$$

Relacija (9) uz (1) i (4) poprima oblik poznate formule za izračunavanja udaljenosti točke od pravca:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (10)$$

Primjer 1.

Odredimo udaljenost točke $T_0(10,7)$ od pravca $p\equiv 3x+4y-12=0$.

Rješenje:

Slijedimo gornji postupak i odabiremo neku točku na pravcu, npr. $P(-2,4.5)$.

Funkcija kojoj tražimo ekstrem je

$$D(t)=(12+4t)^2+(2.5-3t)^2=25t^2+81t+150.25$$
$$D'(t)=50t+81,\ D''(t)=50$$
$$D'(t)=50t+81=0\Rightarrow t=-\frac{81}{50},$$
$$D''\left(-\frac{81}{50}\right)=50>0.$$

Stacionarna točka je

$$x=-2-4\cdot\left(-\frac{81}{50}\right)=\frac{112}{25},$$
$$y=4.5+3\cdot\left(-\frac{81}{50}\right)=-\frac{9}{25}.$$

Konačno, udaljenost točaka $T_0(10,7)$ i $P_t\left(\frac{112}{25},-\frac{9}{25}\right)$ iznosi

$$d=\frac{|3(10+2)+4(7-4.5)|}{\sqrt{16+9}}=\frac{46}{5}=9.2.$$

Napomena: Istu vrijednost dobivamo računajući udaljenost točaka $T_0(10,7)$ i $P_t\left(\frac{112}{25},-\frac{9}{25}\right)$ po formuli za udaljenost dviju točaka, tj.

$$d\left(T_0,P_t\right)=\sqrt{\left(x_P-x_{T_0}\right)^2+\left(y_P-y_{T_0}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{52\ 900}{625}}=9.2.$$

B: Udaljenost točke od ravnine

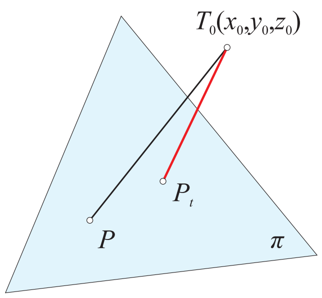
Neka su zadane točka $T_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ i ravnina $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$. Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da je $C\neq 0$. U tom slučaju jednadžbu ravnine možemo zapisati u obliku

$$\pi\equiv\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}y+z+\frac{D}{C}=0.$$

Označimo li $a=\frac{A}{C}$, $b=\frac{B}{C}$, $c=\frac{D}{C}$, možemo pisati

$$\pi\equiv ax+by+z+c=0 \qquad (1)$$

odnosno



Slika 1-B

$$z=-\left(ax+by+c\right). \qquad (2)$$

Odaberimo u ravnini točku $P\left(x,y,-\left(ax+by+c\right)\right)$ i odredimo udaljenost

$$d=d\left(x,y\right)=d\left(P,T_0\right)$$
$$=\sqrt{\left(x_0-x\right)^2+\left(y_0-y\right)^2+\left(z_0+\left(ax+by+c\right)\right)^2}. \qquad (3)$$

Analogno dvodimenzionalnom slučaju, funkcija $d(x,y)$ poprima ekstrem kada ekstrem poprima funkcija

$$D\left(x,y\right)=d^2\left(x,y\right). \qquad (4)$$

Da bismo odredili ekstrem funkcije $D\left(x,y\right)$ potrebne su nam derivacije

$$d_1=\frac{\partial D(x,y)}{\partial x},\ d_2=\frac{\partial D(x,y)}{\partial y},\ d_{11}=\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x^2},$$
$$d_{12}=\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x\partial y},\ d_{22}=\frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial y^2}.$$

Dobivamo redom:

$$d_1=2\left(x-x_0+a\left(ax+by+z_0+c\right)\right);$$
$$d_2=2\left(y-y_0+b\left(ax+by+z_0+c\right)\right); \qquad (5)$$
$$d_{11}=2\left(1+a^2\right);\ d_{12}=2ab;\ d_{22}=2\left(1+b^2\right).$$

Kako su $d_{11}=2\left(1+a^2\right)>0$ i

$$\Delta=\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12}\\ d_{12} & d_{22}\end{vmatrix}=4\left(1+a^2+b^2\right)>0,$$

funkcija $D\left(x,y\right)$ poprima minimum, što je u skladu s teoremom: *u točkama u kojima se poništavaju derivacije d_1 i d_2 imamo minimum ako je $d_{11}>0$ i $\Delta=d_{11}\cdot d_{22}-d_{12}^2>0$.*

Odredimo još o kojoj se točki ravnine π radi.

U to svrhu riješimo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} d_1=0\\ d_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-x_0+a(ax+by+z_0+c)=0\\ y-y_0+b(ax+by+z_0+c)=0\end{cases}.$$

Prepišimo ga u sređenom obliku:

$$\begin{cases}(1+a^2)x+aby=x_0-az_o-ac\\ abx+(1+b^2)y=y_0-bz_0-bc\end{cases}. \qquad (6)$$

Primijenimo li bilo koju metodu rješavanja sustava jednadžbi, dolazimo do rješenja

$$(x,y)=\left(-\frac{ac-x_0-b^2x_0+aby_0+az_0}{1+a^2+b^2},\right. \qquad (7)$$
$$\left.-\frac{bc-y_0-a^2y_0+abx_0+bz_0}{1+a^2+b^2}\right).$$

Treću koordinatu odredimo iz izraza $z = -(ax + by + c)$ uvrštavanjem vrijednosti dobivenih za x i y u (7). Naime,

$$z = -\frac{d + ax_0 - a^2 z_0 + b(y_0 - bz_0)}{1 + a^2 + b^2}. \tag{8}$$

Lako je provjeriti da točka $P_t(x, y, z)$ leži u ravnini π.

Preostaje nam izračunati minimalnu vrijednost funkcije $D(x, y) = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$.

Računamo redom:

$$(x_0 - x)^2 = \left(x_0 + \frac{ac - x_0 - b^2 x_0 + aby_0 + az_0}{1 + a^2 + b^2} \right)^2$$
$$= \frac{a^2 (ax_0 + by_0 + z_0 + c)^2}{(1 + a^2 + b^2)^2}; \tag{9}$$

$$(y_0 - y)^2 = \left(y_0 + \frac{bc - y_0 - a^2 y_0 + abx_0 + bz_0}{1 + a^2 + b^2} \right)^2$$
$$= \frac{b^2 (ax_0 + by_0 + z_0 + c)^2}{(1 + a^2 + b^2)^2}; \tag{10}$$

$$(z_0 - z)^2 = \left(z_0 + \frac{c + ax_0 - a^2 z_0 + b(y_0 - bz_0)}{1 + a^2 + b^2} \right)^2$$
$$= \frac{(ax_0 + by_0 + z_0 + c)^2}{(1 + a^2 + b^2)^2}. \tag{11}$$

Na temelju relacija (9), (10) i (11) dobivamo

$$D(x, y) = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$
$$= \frac{(ax_0 + by_0 + z_0 + c)^2}{1 + a^2 + b^2}.$$

Kako je $d = d(x, y) = \sqrt{D(x, y)}$, slijedi

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + z_0 + c|}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}. \tag{12}$$

Uvažimo li oznake $a = \frac{A}{C},\ b = \frac{B}{C},\ c = \frac{D}{C}$, relacija (12) poprima poznati oblik

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Primjer 2.

Izračunajmo udaljenost točke $T_0(1,1,1)$ od ravnine $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$.

Rješenje:

Tražimo ekstrem funkcije

$$D(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 2.$$

Derivacije su redom:

$$d_1 = 4x + 2y - 2$$
$$d_2 = 2x + 4y - 2$$
$$d_{11} = 4,\quad d_{12} = 2,\quad d_{22} = 4.$$

Kako je $d_{11} = 4 > 0$ i $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$,

funkcija $D(x, y)$ poprima minimum.

Iz sustava

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

što zajedno s relacijom $z = -(ax + by + c)$ daje

stacionarnu točku $P_t\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

Konačno je udaljenost

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + z_0 + c|}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Napomena: Ovdje je također

$$d = d(T_0, P_t)$$
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Varijanta 2

A: Udaljenost točke od pravca

Tražimo udaljenost točke $T_0(x_0, y_0)$ od pravca

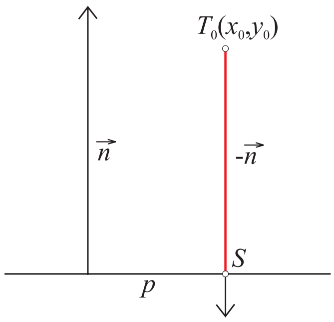
$$p \equiv Ax + By + C = 0.. \tag{1}$$

Točkom $T_0(x_0, y_0)$ položimo pravac okomito na zadani pravac. Kako je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ vektor normale pravca p, jednadžba okomice je

$$o \equiv \frac{x-x_0}{-A} = \frac{y-y_0}{-B},$$

ili, u parametarskom obliku

$$o \equiv \begin{cases} x = x_0 - At \\ y = y_0 - Bt \end{cases}. \qquad (2)$$



Slika 2-A

Odredimo sjecište $p \cap o = \{S\}$, tj. odredimo parametar t tako da točka $S(x,y)$ čije su koordinate $(x_0 - At,\ y_0 - Bt)$ dane jednadžbama (2) leži na pravcu p. Bit će

$$A(x_0 - At) + B(y_0 - Bt) + C = 0.$$

Odavde slijedi da je

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}. \qquad (3)$$

Uvrstimo li t iz (3) u (2), dobivamo koordinate točke $S(x,y)$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \\ y &= y_0 - B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Tražena udaljenost je udaljenost točaka $T_0(x_0, y_0)$ i $S(x,y)$ koja iznosi

$$d = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}}$$

odnosno,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (5)$$

Primjer 1.

Odredimo udaljenost točke $T_0(10,7)$ od pravca $p \equiv 3x + 4y - 12 = 0.$

Rješenje:

Koordinate točke S računamo pomoću relacija (3) i (4):

$$S(x,y) = (x_0 - At,\ y_0 - Bt) = \left(\frac{112}{25}, -\frac{9}{25}\right).$$

Udaljenost prema (5) iznosi:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{46}{5} = 9.2.$$

B: Udaljenost točke od ravnine

Neka su zadane točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ravnina

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0\,. \qquad (1)$$

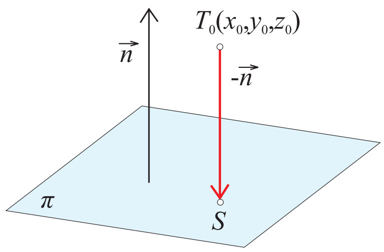
Točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ položimo pravac okomit na ravninu π.

Kako je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektor normale ravnine, jednadžba okomice je

$$o \equiv \frac{x-x_0}{-A} = \frac{y-y_0}{-B} = \frac{z-z_0}{-C},$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x_0 - At,\ \ y = y_0 - Bt,\ \ z = z_0 - Ct. \qquad (2)$$



Slika 2-B

Kao i u dvodimenzionalnom slučaju, odredimo sjecište $p \cap o = \{S\}$ tj. odredimo parametar t tako da točka $S(x,y,z)$ čije su koordinate dane jednadžbama (2) leži u ravnini π. Bit će

$$A(x_0 - At) + B(y_0 - Bt) + C(z_0 - Ct) + D = 0.$$

Iz posljednje relacije slijedi da je

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}. \qquad (3)$$

Uvrstimo li t iz (3) u (2) dobivamo koordinate točke $S(x,y,z)$:

$$x = x_0 - A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2};$$
$$y = y_0 - B\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}; \qquad (4)$$
$$z = z_0 - C\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Tražena udaljenost je udaljenost točaka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i $S(x,y,z)$ tj.

$$d = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}},$$

odnosno

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5)$$

Primjer 2.

Izračunajmo udaljenost točke $T_0(1,1,1)$ od ravnine $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$.

Rješenje:

Koordinate točke S izračunamo prema (3) i (4):

$$S(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Udaljenost, prema (5), iznosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Varijanta 3

A: Udaljenost točke od pravca

Tražimo udaljenost točke $T_0(x_0, y_0)$ od pravca

$$p \equiv Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Na pravcu odaberimo točku $P(a,b)$. Radijvektor točke $T_0(x_0, y_0)$ u odnosu na $P(a,b)$ kao ishodište je

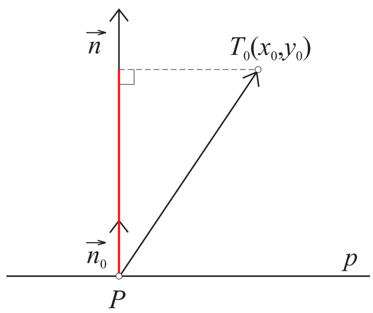
$$\vec{r}_{T_0} = \overrightarrow{PT_0} = (x_0 - a)\vec{i} + (y_0 - b)\vec{j}. \qquad (2)$$

Želimo projicirati $\vec{r}_{T_0}$ na normalu $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$ pravca p.

U tu svrhu nam treba jedinični vektor normale

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j}}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

te pojam skalarne projekcije vektora na os (zadanu vektorom).



Slika 3-A

Skalarna projekcija vektora $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ na os zadanu vektorom $\vec{s} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j}$ računa se po formuli

$$\delta = \vec{a} \cdot \vec{s}_0 = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) \cdot \frac{s_1\vec{i} + s_2\vec{j}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$$
$$= \frac{a_1 s_1 + a_2 s_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

U našem slučaju vektor $\vec{r}_{T_0}$ glumi $\vec{a}$, a vektor $\vec{n}_0$ je $\vec{s}$:

$$d = |\delta| = \left|\vec{r}_{T_0} \cdot \vec{n}_0\right| = \frac{|A(x_0 - a) + B(y_0 - b)|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ili

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (4)$$

gdje je $C = -(Aa + Bb)$ što u sebi skriva činjenicu da je točka $P(a,b)$ na pravcu $p \equiv Ax + By + C = 0$, tj. da je $Aa + Bb + C = 0$.

Napomena: Kako je $\delta > 0$ ili $\delta = 0$ ili $\delta < 0$ (ovisno o kutu vektora $\vec{r}_{T_0}$ i $\vec{n}$), za udaljenost uzimamo $|\delta|$.

Primjer 1.

Odredimo udaljenost točke $T_0(10,7)$ od pravca $p \equiv 3x+4y-12=0.$

Rješenje:

Odaberimo na pravcu proizvoljnu točku, npr. $P(-2,4.5)$. Prema opisanom postupku imamo redom:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i}+B\vec{j}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5},$$

$$\vec{r}_{T_0} = (x_0-a)\vec{i}+(y_0-b)\vec{j} = 12\vec{i}+2.5\vec{j},$$

$$d = |\delta| = (12\vec{i}+2.5\vec{j})\cdot\frac{3\vec{i}+4\vec{j}}{5} = \frac{46}{5} = 9.2.$$

B: Udaljenost točke od ravnine

Neka su zadane točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ravnina

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0\,. \tag{1}$$

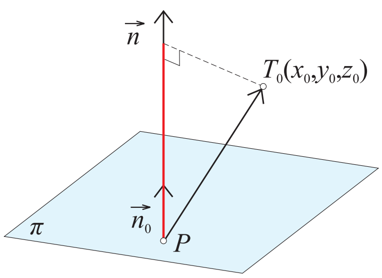
U ravnini odaberimo točku $P(a,b,c)$ što znači da je $Aa+Ba+Ca+D=0.$ Radijvektor točke $T_0(x_0,y_0,z_0)$ u odnosu na $P(a,b,c)$ kao ishodište je

$$\vec{r}_{T_0} = (x_0-a)\vec{i}+(y_0-b)\vec{j}+(z_0-c)\vec{k}. \tag{2}$$

Projiciramo $\vec{r}_{T_0}$ na normalu $\vec{n} = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ ravnine π.

U ovom slučaju je jedinični vektor normale

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$



Slika 3-B

Skalarna projekcija vektora $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ na os zadanu vektorom $\vec{s} = s_1\vec{i}+s_2\vec{j}+s_3\vec{k}$ računa se po formuli

$$\delta = \vec{a}\cdot\vec{s}_0 = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot\frac{s_1\vec{i}+s_2\vec{j}+s_3\vec{k}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}} = \frac{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3}{\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}}. \tag{3}$$

I u ovom slučaju vektor $\vec{r}_{T_0}$ glumi $\vec{a}$, a vektor $\vec{n}_0$ je $\vec{s}$, pa imamo da je

$$d = |\delta| = \frac{|A(x_0-a)+B(y_0-b)+C(z_0-c)|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

odnosno

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{4}$$

gdje je $D=-(aA+bB+cC)$, što ukazuje na činjenicu da točka $P(a,b,c)$ leži u ravnini $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$, tj. da je $Aa+Bb+Cc+D=0.$

Primjer 2.

Odredimo udaljenost točke $T_0(1,1,1)$ od ravnine $\pi \equiv x+y+z-1=0.$

Rješenje:

Izaberemo li $P(0.8,\ 0.1,\ 0.1),$ bit će

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}},$$

$$\vec{r}_{T_0} = (x_0-a)\vec{i}+(y_0-b)\vec{j}+(z_0-c)\vec{k} = 0.2\vec{i}+0.9\vec{j}+0.9\vec{k},$$

$$d = |\delta| = \left|\vec{r}_{T_0}\cdot\vec{n}_0\right| = \left|(0.2\vec{i}+0.9\vec{j}+0.9\vec{k})\cdot\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}\right| = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$