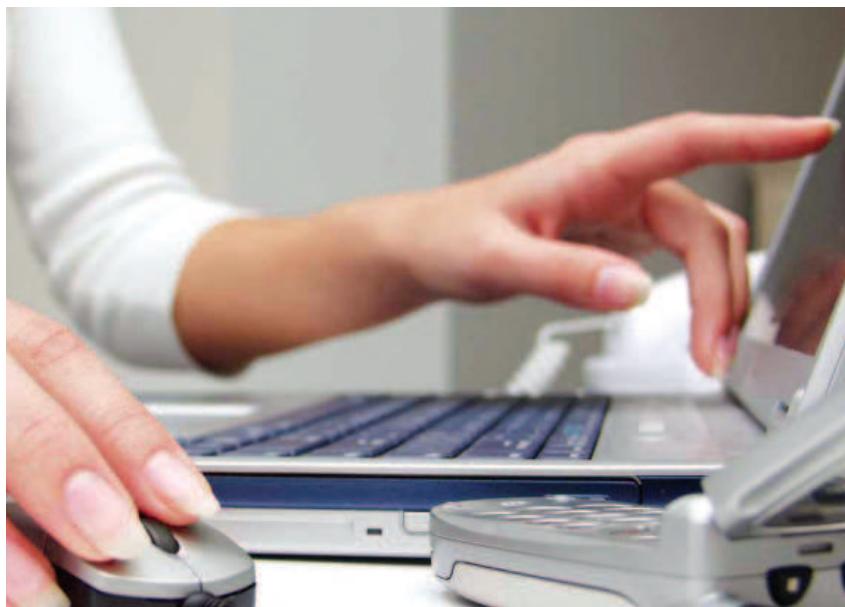


GeoGebra 3.0 (2)

Matematičke naredbe

Šime Šuljić, Pazin



U prošlom broju MiŠ-a upoznali smo vas s novinama koje donosi nova inačica programa, a koje su lako uočljive u izborničkoj i alatnoj traci. U donjem desnom kutu programskog prozora nalazi se padajući izbornik *Naredbe* s pregrštom novih naredbi. U ovom broju pozabavit ćemo se tim jednostavnim naredbama koje ovaj program čine vrlo moćnim. Neke od tih naredbi podrobnije ćemo na primjerima objasniti, a neke samo navesti. To ne znači da su neke od naredbi manje važne ili manje korisne. Gotovo svaka se može upotrijebiti na kreativan način u raznim situacijama. Slobodno se može reći da se granice ovog programa poklapaju s granicama korisnikove matematičke maštete.

Niz

Niz[izraz e, varijabla i, broj a, broj b] – Lista objekata kreiranih korištenjem izraza *e* i indeksa *i* koji se mijenja na intervalu od *a* do *b*.

Primjer: $L = \text{Niz}[(2, i), i, 1, 5]$ kreira listu točaka čije su koordinate na *y*-osi od 1 do 5.

Niz[izraz e, varijabla i, broj a, broj b, broj s]

– Lista objekata kreiranih korištenjem izraza *e* i indeksa *i* koji se mijenja na intervalu od *a* do *b* s korakom povećanja *s*.

Primjer: $L = \text{Niz}[(2, i), i, 1, 5, 0.5]$ kreira listu točaka čije su koordinate na *y*-osi od 1 do 5 s korakom povećanja 0.5.

Napomena. Da bi parametri a i b bili dinamični, možete koristiti klizač za promjenu varijabli. Ono što zadajemo naredbom **Niz** ne mora nužno biti prikazano u geometrijskom prozoru. Moguće je nizove i vrijednosti funkcija istraživati čisto numerički. Želimo li, na primjer, dobiti vrijednosti $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ izraza za neki proizvoljni niz prirodnih brojeva, dovoljno je u *Polje za unos* upisati:

Niz[(1 + 1 / n)ⁿ, n, 100, 1000, 200].

Rezultat će biti prikazan u algebarskom prozoru kao niz vrijednosti:

Zavisni objekti
list1 = {2.70481, 2.71377, 2.71557, 2.71634, 2.71677}

Prateće naredbe uz naredbu Niz

Element[lista L , broj n] – daje n -ti element liste L .

Duljina[lista L] – daje duljinu liste L , odnosno broj njezinih elemenata.

Minimum[lista L] – daje najmanji element liste L .

Maksimum[lista L] – daje najveći element liste L .

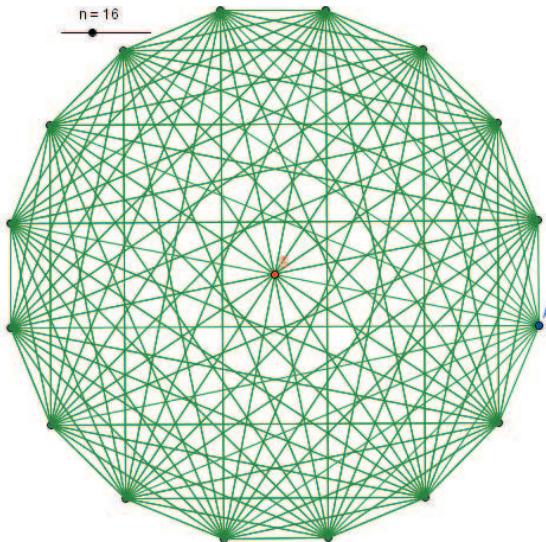
Primjer. Nacrtati vrhove i sve dijagonale proizvoljnog pravilnog mnogokuta.

U geometrijskom prozoru nacrtajte točku S koja će predstavljati središte mnogokuta i točku A koja je jedan njegov vrh. Zadajte klizač n : donja granica 3 i gornja 20, a korak povećanja 1. Za početak potrebno je točku A n -puta zarotirati oko središta S za kut $360/n$ naredbom:

list1 = Niz[Rotacija[A, i 360/n, S], i, 0, n-1].

Tako se dobiju vrhovi mnogokuta. Jednom naredbom moguće je sada dobiti sve stranice i dijagonale:

list2=Niz[Niz[Dužina[Element[[list1,k], Element[[list1, i]], i, 2, n], k, 1, n].



Ovdje se radi o ugniježđenim naredbama. Naredba **Dužina** povezuje dva vrha. Vrhovi su elementi liste **list1** pa ih se poziva naredbom **Element**[**list1**, k] i **Element**[**list1**, i], gdje k znači k -ti vrh, a i i -ti vrh. Sve mora biti smješteno unutar dvostrukе naredbe **Niz** koja i mijenja od 2 do n , a k od 1 do n .

Napomena: Nije moguće uređivati svojstva pojedinačnog objekta neke liste kao što su debljina crte ili točke, stil i boja. Čak ih nije moguće pojedinačno označiti. Ako neki element želite istaći, morate najprije posebno nacrtati taj objekt koristeći naredbu **Element**. Kada je u pitanju ugniježđena naredba, onda i naredba **Element** mora ići ugniježđeno. Probajte naredbu

Element[**Element**[**list2**, 3], 10],

koja iz treće skupine spojnice izdvaja desetu dužinu.

Nove naredbe za funkciju

Funkcija na intervalu

Funkcija[funkcija f , broj a , broj b] – crta funkciju jednaku funkciji f na intervalu $[a, b]$ i koja nije definirana izvan $[a, b]$. Granice intervala mogu biti određeni brojevi ali ih možete

matematika i računalo

zadati kao parametre pa ih dinamično možete mijenjati pomoću klizača ili tipkama + i –. Iz padajućeg izbornika pored polja za unos moguće je unijeti i simbol ∞ za beskonačno.

Uvjetna funkcija

Možete koristiti uvjetnu naredbu **Ako** kako biste kreirali uvjetnu funkciju. Podsetimo:

Ako[uvjet, a, b] – dat će kopiju objekta **a** ako je **uvjet** ispunjen, odnosno logička mu je vrijednost **true**, a kopiju objekta **b** ako je ta vrijednost **false**.

Ako[uvjet, a] – dat će kopiju objekta **a** ako je **uvjet** ispunjen, odnosno logička mu je vrijednost **true**, odnosno nedefinirani objekt, ako je ta vrijednost **false**.

Primjer. $f(x) = \text{Ako}[x < 3, \sin(x), x^2]$ dat će funkciju koja je jednaka $\sin(x)$ za $x < 3$ i x^2 za $x \geq 3$.

Napomena: Možete koristiti derivacije i integrale takvih funkcija, kao i njihova sjecišta, na isti način kao i kod “običnih” funkcija.

Duljina grafa funkcije

Duljina[funkcija f, broj x1, broj x2] – daje duljinu grafa funkcije **f** na intervalu **x1** i **x2**.

Duljina[funkcija f, točka A, točka B] – daje duljinu grafa funkcije **f** između dviju točaka **A** i **B** koje leže na grafu.

Iteracija funkcije

Iteracija[funkcija f, broj x0, broj n] – izvodi **n**-iteraciju funkcije **f** koristeći kao početnu vrijednost **x0**. Recimo, ako je zadana funkcija $f(x) = x^2$, naredba **Iteracija [f, 3, 2]** dat će rezultat $(3^2)^2 = 81$.

IteracijskaLista[funkcija f, broj x0, broj n]
– daje listu **L** duljine **n+1** čiji elementi su iteracije funkcije **f** s početnom vrijednošću **x0**.

Primjer: Nakon definiranja funkcije $f(x) = x^2$ naredba **L = IteracijskaLista[f, 3, 2]** daje listu $L = \{3, 3^2, (3^2)^2\} = \{3, 9, 81\}$.

Primjer. U jednom od ranijih brojeva MiŠ-a pisali smo o logističkoj funkciji. Riječ je o funkciji koja opisuje promjene u populaciji neke biljne ili životinjske vrste u danom ekosustavu. Biolozi smatraju da promjene kroz vremenska razdoblja vrlo dobro opisuju jednostavna iteracijska jednadžba:

$$x_{i+1} = k \cdot x_i(1 - x_i),$$

gdje je konstanta **k** specifična za određenu vrstu.

Računalni program **Excel** je jako pogodan za ispitivanje takvih jednadžbi, ali se s novim naredbama i **GeoGebra** može vrlo spretno nositi s tim problemom. Ukoliko se želite bolje upoznati s problemom logističke funkcije, preporučamo vam da potražite spomenuti članak, a ovdje samo razmotrimo kako prikazati iteracije u tehničkom smislu. Da bismo u **GeoGebri** točkama prikazali iteracijske vrijednosti pojedinih vremenskih razdoblja, potrebno je:

1. zadati varijabilan broj (klizač) **k**, $0 < k < 4$; korak povećanja 0.01;
2. definirati funkciju: $f(x) = k x (1 - x)$;
3. zadati varijabilan broj **n**, $0 < n < 100$; korak povećanja 1;
4. na intervalu zadati početnu vrijednost **x0** i omogućiti promjene te vrijednosti pomakom miša, recimo točkom **A** na apscisi: $x_0 = x(A)$;
5. zadati niz točaka naredbom:
Niz[(i, Iteracija[f, x0, i]), i, 0, n, 1].

Ukoliko te točke želimo spojiti dužinama, onda je u polje za unos potrebno upisati ovakvu naredbu:

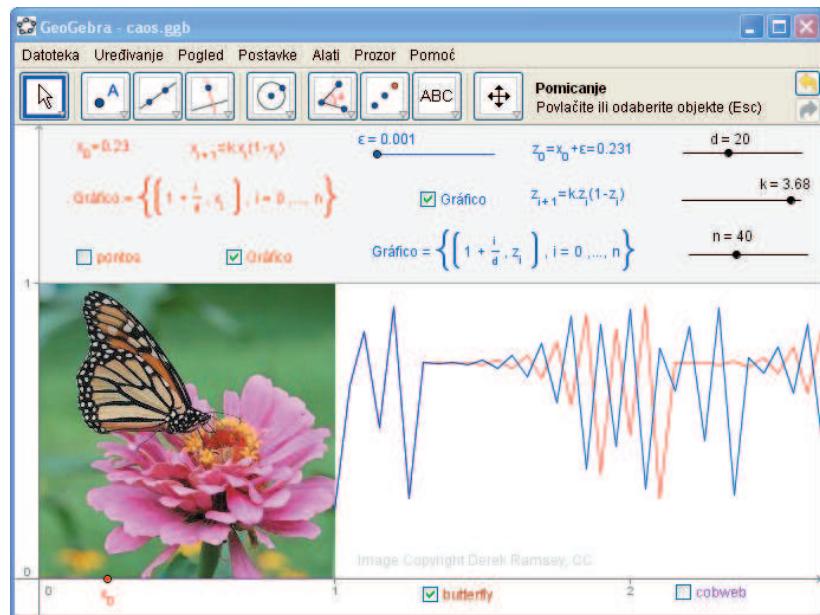
Niz[Dužina[(i, Iteracija[f, x0, i]), (i + 1, Iteracija[f, x0, i + 1])], i, 0, n - 1, 1].

Želite li vidjeti cijeli niz točaka koji se na apscisi proteže do 100, a da pri zumiranju proporcionalno ne smanjite raspon među ordinatama, odaberite gumb i mišem povlačite po osi x.

Priložena slika s leptirom rad je kolege Antonia Ribeira iz Portugala i ovdje je prenesena bez izmjena, zbog "umjetničkog dojma". Izgledom grafike i zapisom matematičkih formula GeoGebri ni uraci zaista znaju izgledati veoma lijepo. Inače, taj rad dostupan je na internetskoj stranici

www.geogebra.org/en/upload.

Odaberite mape português / AntonioRibeiro / Funções i datoteku caos.ggb. Svakako ga pogledajte jer se na ovom uratku može puno naučiti. Uključite sve kontrolne okvire da vidite što se sve još može vidjeti na ovom uratku. Najbolje ćete razumjeti korake konstrukcije ukoliko otvorite prozor Opis konstrukcije u izborniku Pogled. Uočite da u GeoGebri jezik nije preprika, jer kao što vidite na slici Opis konstrukcije, svi nazivi i sve naredbe su na hrvatskom. I to bez ikakve intervencije! GeoGebra se uvijek prilagodi jeziku korisnika. Preporučam vam i druge radeve kolege Ribeira. Zasigurno će vas zadiviti.



Parametarske krivulje

Krivulja[izraz e_1 , izraz e_2 , parametar t , broj a , broj b] – crta krivulju u kartezijevom koordinatnom sustavu, čija je komponenta x zadana izrazom e_1 i y s izrazom e_2 koji ovise o parametru t , unutar zadanog intervala $[a, b]$.

Derivacija[krivulja c] – daje derivaciju krivulje c .

Duljina[krivulja c , broj t_1 , broj t_2] – daje duljinu krivulje c između brojeva t_1 i t_2 .

Duljina[krivulja c , točka A , točka B] – daje duljinu krivulje c između dviju točaka A i B na krivulji.

Napomena: Parametarske krivulje možete koristiti poput funkcija u aritmetičkim izrazima.

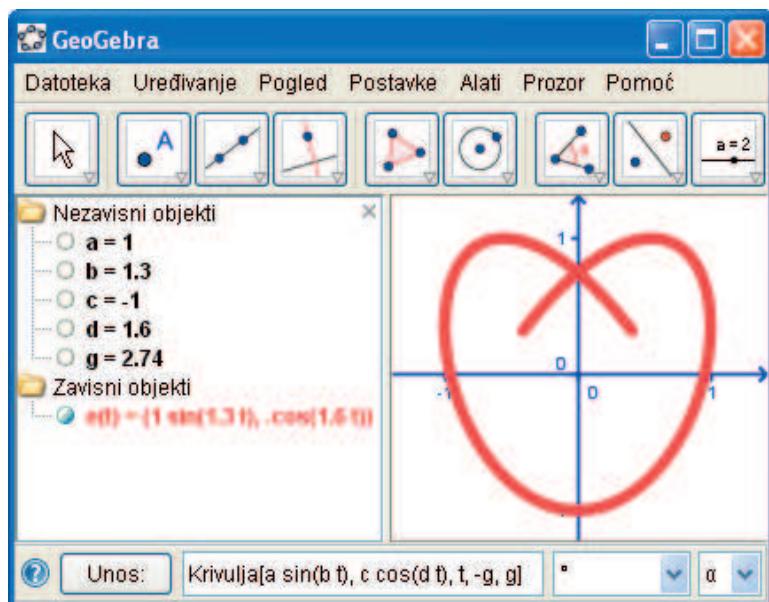
Primjer: Unos $c(3)$ daje točku za parametar $t = 3$ na krivulji c . Korištenjem miša također možete zadati točku na krivulji uz pomoć načina

Nova točka.

Opis konstrukcije		
Br.	Ime	Definicija
10	točka A	točka na c
11	broj x_0	$x(A)$
12	točka B	$(x_0, f(x_0))$
13	dužina [A, B]	Dužina[A, B]
14	broj d	
15	List L1	$\text{Niz}[(1 + i/d, \text{Iteracija}[x_0, i, 0, n, 1])]$
16	List L2	$\text{Niz}[\text{Dužina}[1 + i/d, \text{Iteracija}[x_0, i, (1 + i + 1)/d, n, 1]]]$
17	funkcija s	
18	funkcija r	funkcija s na intervalu $[0, 1]$
19	List L3	$\text{Niz}[\text{Iteracija}[f, x_0, i], f(\text{Iteracija}[f, x_0, i]), i, 0, n - 1, 1]$
20	List L4	$\text{Niz}[\text{Iteracija}[f, x_0, i], \text{Iteracija}[f, x_0, i, 0, n, 1]]$
21	List L5	$\text{Niz}[\text{Dužina}[\text{Iteracija}[f, x_0, i], \text{Iteracija}[f, x_0, i]], (\text{Iteracija}[f, x_0, i])]$
22	List L6	$\text{Niz}[\text{Dužina}[\text{Iteracija}[f, x_0, i], f(\text{Iteracija}[f, x_0, i])]]$

matematika i računalo

Primjer. Za eksperimentiranje s raznim oblicima krivulja vjerojatno je najzahvalnija *Lissajousova krivulja*. U polje za unos upišite naredbu: Krivulja [$a \sin(b t), c \cos(d t), t, -g, g$], a prethodno naravno zadajte brojeve a, b, c, d i g . Kada dobijete krivulju varirajte svaki broj posebno. Rezultat te "igre" bit će nevjerojatno velik broj zanimljivih figura. Jedna od njih je i ova sročika krivulja na slici.



Ponešto iz analize

Zakrivljenost

Zakrivljenost[točka A , funkcija f]
– daje zakrivljenost funkcije f u točki A .

Zakrivljenost[točka A , krivulja c]
– daje zakrivljenost krivulje c u točki A .

Vektor zakrivljenosti

VektorZakrivljenosti[točka A , funkcija f]
– crta vektor zakrivljenosti funkcije f u točki A .

VektorZakrivljenosti[točka A , krivulja c]
– crta vektor zakrivljenosti krivulje c u točki A .

Kružnica zakrivljenosti

KružnicaZakrivljenosti[točka A , funkcija f]
– kružnica zakrivljenosti funkcije f u točki A .

KružnicaZakrivljenosti[točka A , krivulja c]
– kružnica zakrivljenosti krivulje c u točki A .

Napomena: Zakrivljenost je recipročna duljini polumjera kružnice zakrivljenosti, pa je tako i duljina vektora zakrivljenosti recipročna duljini polumjera kružnice zakrivljenosti!

Nekoliko općih naredbi

Modulo funkcija

OstatakDijeljenja[broj a , broj b]
– ostatak pri dijeljenju broja a brojem b .

Cjelobrojno dijeljenje

CjelobrojnoDijeljenje [broj a , broj b]
– daje cjelobrojni količnik pri dijeljenju broja a brojem b .

Površina mnogokuta određenog vrhovima

Površina[točka A , točka B , točka C , ...]
– površina mnogokuta zadanog točkama A, B, C, \dots

Opseg

Opseg[konika c]
– daje opseg konike c (kružnica ili elipsa).

Opseg[Mnogokut $poly$]
– opseg mnogokuta $poly$; GeoGebra po svojim postavkama dodjeljuje ime mnogokutu $poly1, poly2, \dots$ Uvijek možete drukčije imenovati ili preimenovati mnogokut. Za preimenovanje je dovoljno kliknuti na objekt i započeti tipkati, a dijaloški okvir se automatski otvoriti.

Afini omjer

AfiniOmjer[točka A , točka B , točka C] – daje afini omjer λ triju kolinearnih točaka A, B , i C , gdje je $C = A + \lambda \cdot AB$.

Dvostruki omjer

DvostrukiOmjer [točka A , točka B , točka C , točka D] – dvostruki omjer λ četiriju kolinearnih točaka A, B, C , i D , gdje je $\lambda = \text{AfiniOmjer}[B,C,D]/\text{AfiniOmjer}[A,C,D]$.

Ime[objekt] – tekst koji pokazuje ime danog objekta. Ova naredba je ponekad potrebna kod dinamičnog teksta za objekte koje bismo mogli preimenovati.

Tablica aritmetičkih operacija i funkcija

Vjerujem da ste stekli dojam da polje za unos ima još naglašeniju ulogu. Stoga će sigurno biti korisno izdvojiti tablicu s raspoloživim operacijama i funkcijama, među kojima ima i novih. Posebno skrećem pozornost na funkciju random(), koja daje slučajan broj između 0 i 1. Tako dobiveni broj može se ugraditi u definiranje drugih objekata. Sa svakim ponovnim otvaranjem datoteke on će mijenjati vrijednost. To može biti posebno korisno pri kreiranju apleta ugrađenih u internetsku stranicu. Sa svakim učitavanjem ili osvježenjem stranice korisnik će dobiti drukčiji objekt. Želite li na slučajan način dobivati samo cijelobrojne vrijednosti 1, 2 i 3, upišite u polje za unos: ceil(3 random()).

Operacija	Unos
zbrajanje	+
oduzimanje	-
množenje	* ili razmaknica
skalarni produkt	* ili w
dijeljenje	/
potenciranje	^ ili 2
faktorijela	!
gamma funkcija	gamma()
zagrade	()
koordinata na x -osi	$x()$
koordinata na y -osi	$y()$
apsolutna vrijednost	abs()
predznak	sgn()
kvadratni korijen	sqrt()
kubni korijen	cbrt()
slučajan broj između 0 i 1	random()
eksponencijalna funkcija	exp() ili e^x
logaritam (prirodni po e)	ln() ili log()

Operacija	Unos
logaritam po 2	ld()
logaritam po 10	lg()
kosinus	cos()
sinus	sin()
tangens	tan()
arkus kosinus	acos()
arkus sinus	asin()
arkus tangens	atan()
kosinus hiperbolni	cosh()
sinus hiperbolni	sinh()
tangens	tanh()
area kosinus hiperbolni	acosh()
area sinus hiperbolni	asinh()
area tangens hiperbolni	atanh()
najveće cijelo manje od ili jednako	floor()
najmanje cijelo veće od ili jednako	ceil()
zaokruženo	round()

Logički operatori

U padajućem izborniku, odmah pored polja za unos, nalaze se funkcije, ali i logički operatori. Osim u uvjetnoj naredbi možete ih koristiti u dijaloškom prozoru svojstva na kartici *Dodatno* u uvjetu za prikaz objekta.

Raspoloživi logički operatori:

Operacija		Primjer	Tipovi
jednako	$\underline{=}$ ili $=$	$a \underline{=} b$ ili $a == b$	brojevi, točke, pravci, konike a, b
nije jednako	\neq ili $!=$	$a \neq b$ ili $a != b$	brojevi, točke, pravci, konike a, b
manje od	$<$	$a < b$	brojevi a, b
veće od	$>$	$a > b$	brojevi a, b
manje ili jednako	\leq ili $<=$	$a \leq b$ ili $a <= b$	brojevi a, b
veće ili jednako	\geq ili $>=$	$a \geq b$ ili $a >= b$	brojevi a, b
i	\wedge	$a \wedge b$	logički a, b
ili	\vee	$a \vee b$	logički a, b
ne	\neg ili $!$	$\neg a$ ili $!a$	logički a
usporedan	\parallel	$a \parallel b$	pravci a, b
okomit	\perp	$a \perp b$	pravci a, b

