

Kako odrediti geometrijsko mjesto točaka

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb



Uvod

Pojam geometrijskog mjesta točaka tj. skupa svih točaka koje zadovoljavaju neki uvjet učenici ponekad teško razumiju i prihvaćaju. Već u prvom razredu gimnazije ili u višim razredima osnovne škole učenici se sreću s tim pojmom. Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od rubova dužine je pravac kojeg zovemo simetrala dužine. U prostoru to postaje simetralna ravnina. Već pri samoj definiciji skupa točaka moramo paziti da ga posve precizno opišemo ili definiramo.

Je li uz opis skupa točaka koje imaju određeno svojstvo vezana predodžba tog skupa točaka tj. geometrijski entitet kao reprezentacija izrečene definicije ili opisa? Učenik će bez problema znati kako je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od rubova dužine jer je naučio i zapamtio

definiciju. No, ako ga nevezano za gradivo kasnije upitamo što predstavlja skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od rubova zadane dužine, ponekad će zastati i neće stvoriti predodžbu simetrale dužine. Neće je znati skicirati. U čemu je problem? Smatram da je problem nerazumijevanja prvenstveno zbog nedovoljnog geometrijskog zora i nemogućnosti vizualiziranja postavljenog problema. Kada uvodimo pojam simetrale dužine, stavljamo učenika pred gotov čin – kažemo definiciju, nacrtamo pravac koji prolazi polovištem okomito na dužinu, pokažemo da je svaka točka pravca jednako udaljena od rubova dužine te smatramo kako stvar nije mogla biti jasnije predložena. Ima učenika koji teže stvaraju geometrijsku predodžbu na osnovi apstraktnih definicija ili čak i konstrukcija koje nisu sami izveli i razumjeli. Tu je “zaobiđena” učenikova potreba za samo-

stalnim zapažanjem i autonomnom izgradnjom geometrijske predodžbe. Predodžba koju nametnemo učeniku neće imati jednaku vrijednost kao predodžba do koje učenik dolazi sam, istraživanjem, pokušajima i pogreškama. Pustimo ga da sam crta, neka pokušava, neka griješi i pomognimo mu da uočava svoje pogreške i nesklad svoje predodžbe s onim što je trebalo dobiti. Dok neki ljudi imaju razvijenu moć stvaranja geometrijskog zora, drugi se s time puno teže nose. Smatram da bi učenicima koji pripadaju ovoj drugoj skupini jako pomoglo kada bi do takvog zora dolazili sporije, samostalnim pokušajima i otkrivanjem. Uz to bi im se moglo olakšati usvajanje uz pomoć više dobro metodički zadanih primjera koje bi sami rješavali, bez utjecaja ili uz posredan utjecaj nastavnika.

Matematika uz pomoć računala

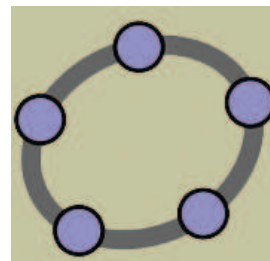
Kako je nastava uz pomoć matematičkih računalnih programa kod nas još uvijek u povojima, a ponegdje se čak izvodi i na pogrešan način, smatrala sam korisnim obratiti pozornost na to i iznijeti neka vlastita iskustva ili iskustva drugih. U ovom radu pokušat ću pokazati kako se problem skupa točaka ravnine u nastavi matematike može obraditi uz pomoć računala na nekoliko različitih načina.

Nove mogućnosti nam otvaraju matematički računalni programi koji podržavaju CAS (*Computer Algebra System*) i DGS (*Dynamic Geometry System*).

Sustavi računalne algebre nam omogućavaju numeričke i algebarske izračune, te geometrijske predodžbe algebarskih jednadžbi, kao i simbolički račun. Neki od poznatijih su *Derive*, *Mathematica*, *Maple*, *MathCAD*.

Najveći doprinosi softvera dinamičke geometrije su u vizualiziranju i dinamici konstrukcija u kojima i nakon izmjena objekti zadržavaju svoja matematička svojstva i odnose. Neki od poznatijih su programi *GeoGebra*, *Geometer's Sketchpad*, *Cabri*, *Cinderella*, *Euclides*, *Geonext*.

GeoGebra sadrži elemente i CAS i DGS pa je možemo koristiti kao pomoć u nastavi velikog dijela srednjoškolske matematike jer pokriva algebru, geometriju i analizu. Uz



to je *open source* (besplatna i dostupna učenicima, učiteljima i institucijama). Otvorena je za web, odnosno internet – za *on line* rad s uradcima načinjenim u *GeoGebri* ne moramo imati instaliranu *GeoGebra* na računalo. *GeoGebra* je web-orijentirana i ne zahtijeva nikakve dodatke a omogućena je neograničena web prezentacija sa svim mogućnostima koje program pruža.

Izvođenje nastave uz pomoć računala

1. Samostalnim radom učenika u informatičkoj učionici postiže se visoki stupanj individualizacije i nove kvalitete. Preporuka je za jednim računalom smjestiti dva učenika. Posebno je važno da su lekcije pažljivo i metodički dobro priređene za samostalan rad.
2. Rad s računalom i LCD-projektorom ili pametnom pločom može unijeti osvježanje u nastavu matematike. Ipak ovakva nastava u svojoj suštini ostaje frontalnog tipa. Pojedini sadržaji mogu se na ovaj način prikazati u potpunoj ljepoti. Također se postiže dinamika i vizualizacija koja je nedostižna klasičnim metodama i alatima. Odabirom odgovarajućeg softvera i dobrom metodičkom pripremom može se nastavi uz pomoć projektora pristupiti istraživačko-problemski, a ne samo predavački.
3. Računalo u matematičkoj učionici – može naći svoju ulogu u pojedinim nastavnim situacijama kada je potrebno nešto kratko pokazati, istražiti ili provjeriti.
4. Učionica s grafičkim i/ili simboličkim kalkulatorima je rješenje kojem se priklanjaju u

nekim zemljama. Iako ima mnoge prednosti – lako su dostupni, prenosivi, na raspolaganju uvijek i svugdje – prilično sam skeptična pri svakodnevnoj uporabi. Ipak bih preporučila ograničenu uporabu samo u matematičkoj učionici i samo kod pojedinih nastavnih cjelina.

Ne preporučam široku i neograničenu uporabu bilo kojeg od ovih načina u nastavi matematike. Svako korištenje računala u nastavi mora biti dobro osmišljeno, povremeno i primjenjeno samo u situacijama gdje se računalom postižu bolji rezultati nego klasičnim oblicima rada. Neki su računalo i LCD-projektor ili pametnu ploču shvatili samo kao zamjenu za grafoskop. Smatram to lošim načinom korištenja računala u nastavi.

Matematički sadržaji zahtijevaju specijalizirane programe. U tom smislu prednost dajem izvedbi matematičkih sadržaja izrađenih specijaliziranim softverom (kao npr. Excelom, Winplotom, Wingeomom, te prije spomenutim programima podržanih DGS ili CAS sustavima) nad računalnim programima opće namjene kao što su Paint, PowerPoint, Word i srodni.

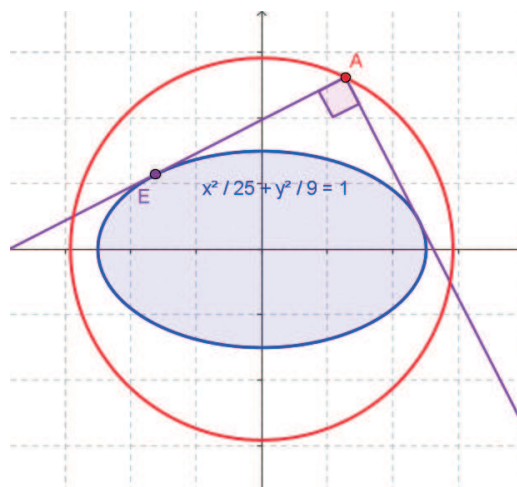
Geometrijsko mjesto točaka uz pomoć računala

Važnu ulogu i pomoć kod problema geometrijskog mjesta točaka mogu odigrati računalo i programi dinamičke geometrije i algebre. Dobre rezultate postićemo prikazom dinamike stvaranja skupa svih točaka koje imaju zadano svojstvo (neovisno je li to zaslon ekrana, projektora ili pametne ploče). Još bolji rezultati pokazuju se ako učenik samostalnim radom na računalu dolazi do traženog skupa točaka. U geometrijskom prozoru programa *GeoGebra* možemo crtati točke koje zadovoljavaju neko svojstvo – tako učenik stvara geometrijski zor. Tada ga pustimo da pokuša sam uočiti o kakvom se skupu točaka radi, neka ga definira, neka mu čak i napiše jednadžbu. Učenik lako može provjeriti je li bio u pravu – ili crtanjem predložene krivulje ili upisivanjem jednadžbe u polje za unos, što je osobitost programa *GeoGeba*. Na taj će način stvoriti intuitivni zor

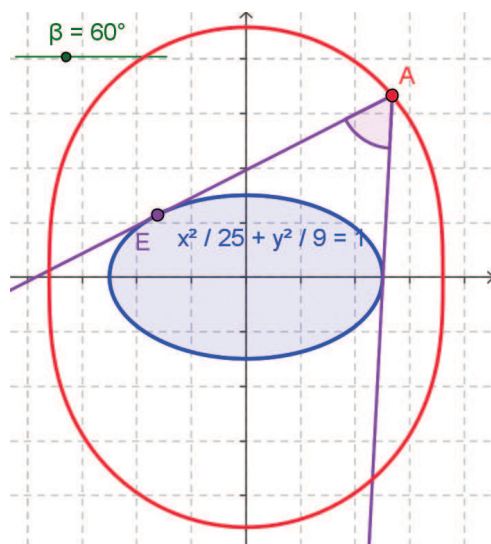
– predodžbu geometrijskog mjesta točaka. Zatim ćemo posegnuti za matematičkim alatima – dokazima ili izvodima jednadžbe tražene krivulje. Lakše je dokazivati neku tvrdnju ili izvoditi jednadžbu kada znamo kakav će biti ishod nego *tapkati u mraku* bez izvjesnog ishoda i bez već stvorene geometrijske predodžbe.

Primjer 1: Odredite geometrijsko mjesto točaka iz kojih se zadana elipsa vidi pod pravim kutom (način izvođenja – računalo i LCD-projektor ili pametna ploča).

U programu *GeoGebra* konstruirat ćemo elipsu s promjenjivim poluosima a i b . Zatim ćemo konstruirati kliznu točku E koja pripada elipsi i može po njoj slobodno “putovati”. U točki E konstruirajmo tangentu. Nakon toga povucimo tangentu koja je okomita na početnu i odredimo točku presjeka A tih dviju tangenti. Povlačimo točku E po elipsi. Pritom točka A opisuje luk krivulje takve da tangente povučene iz svake točke te krivulje zatvaraju pravi kut. Traženo geometrijsko mjesto točaka možemo odrediti ili tako da točka A ostavlja trag i crta krivulju dok povlačimo E po elipsi ili pomoću naredbe **Lokus** koja odmah ucrtava sve točke s naznačenim svojstvom. Čitavu konstrukciju bilo bi dobro izvoditi polako, na licu mjesta, uživo, tako da učenik prati naredbe kojima izvodimo konstrukciju. Potrebno nam je svega par minuta da je izvedemo. Kakvu krivulju opisuje točka A ?



Neka učenici sami zaključite o kojoj se krivulji radi i koja je jednačba te krivulje. Ne uspiju li pomoćno im ucrtavanjem tangenti koje su usporedne s glavnom i sporednom poluosi. Nakon što učenici odgovore, napravimo provjeru upisivanjem jednačbe predložene krivulje u polje za unos. Ako su učenici znatiželjni, možemo ići još dalje s ovim primjerom mijenjajući kut između tangenti i odrediti geometrijsko mjesto točaka iz kojih se elipsa vidi pod kutom od 30° , 60° , 75° , 105° ... Naći geometrijsko mjesto točaka za takve kutove algebarskim putem je vrlo teško.

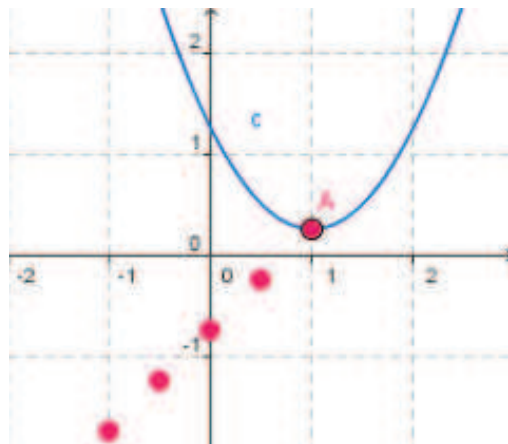


Prije izvedene prezentacije na platnu, treba s učenicima provesti diskusiju, raspraviti o definiciji elipse i njezine tangente, te o svojstvima tangente na elipsu. Nakon izvedene prezentacije s učenicima treba ponoviti uvjet diranja i okomitosti te zadatak riješiti algebarskim putem. Dobre ćemo rezultate postići ako ponovimo činjenicu o kutu nad promjerom te istaknemo karakteristične tangente koje potkrjepljuju taj poučak.

Sličnim postupkom možemo riješiti i zadatak koji često susrećemo u zbirkama.

Primjer 2: (Dakić, Elezović: Matematika 2, Algebra, str. 82, Element, Zagreb, 2003.) Jednačbom $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$, $m \in \mathbb{R}$ dan je skup parabola. Odredi skup točaka ravnine što ga čine tjemena svih ovih parabola.

Elemente konstrukcije unosimo na licu mjesta. Prvo zadamo broj m pomoću klizača (dobro je namjestiti pomak klizača na 0.5) a zatim upišemo jednačbu parabole. Pomićemo klizač (pomoću tipki +/-). Neka učenici promatraju kako se s parametrom m mijenja jednačba parabole u algebarskom prozoru i pomiče njezin graf na crtačoj plohi. Važno je da učenici uoče kako se ne mijenja oblik parabole (zašto?) već samo njezin položaj u koordinatnoj ravnini. Možemo i uključiti trag parabole kako bi učenici mogli promatrati položaje niza parabola koje nastaju pri pomaku. Nakon toga ucrtajmo tjemenu iz polja za unos (naredba Tjemenu[c]) i promijenimo mu svojstva (boja, debljina) kako bismo ga istaknuli te i tjemenu uključimo trag. Opet pomićemo klizač i neka učenici promatraju skup svih tjemena koja nastaju pomakom klizača. Lako uoče da je to pravac. Neka učenici izgovore jednačbu pravca. Provjera se lako napravi ukucavanjem jednačbe pravca u polje za unos.



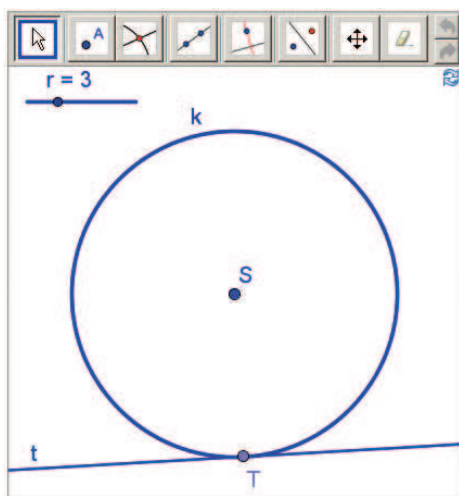
Nakon što je zadatak predložen na platnu i nakon što učenici steknu osjećaj što trebaju tražiti, lakše im je računskim putem doći do rješenja ovog i sličnih zadataka.

Primjer 3: Neka je L nožište okomice iz bilo koje točke K kružnice $k(S, r)$ na njezinu tangentu s diralištem u zadanoj točki T i neka je A točka simetrična točki L s obzirom na pravac KT . Što je skup svih točaka A ? (Način izvođenja – radionica ili samostalni rad učenika za računalom).

U ovakvom primjeru, gdje je na početku posve neizvjesno što se očekuje, poželjno je da učenik sam konstruira rješenje. Izvodeći konstrukciju uočavat će odnose između pravaca i točaka, a privikavat će se i radu s programom. To možemo postići na dva načina. Ako smo u učionici s računalima i raspoložemo projektorom, možemo projicirati korake konstrukcije na platno i objašnjavati učenicima što treba raditi, a oni neka tada na računalu izvode zadane korake konstrukcije. Dakle, možemo rješavanje ovog zadatka izvoditi kao svojevrsni oblik radionice što je učenicima zanimljivije i više su uključeni nego kad samo gledaju prezentaciju. Motiviranost učenika je također tada puno veća. Međutim, to ponekad može biti mukotrpno jer svi učenici ne razumijevaju i ne prate naša objašnjenja istim tempom i jednakom vještinom. Dobro je tada imati još jednu osobu koja će nam pomagati – recimo učenika koji je već vičan radu s programom.

Ovdje bih također preporučila samostalni rad učenika za računalom. U istom prozoru na računalu istaknuti su i aplet i objašnjeni koraci konstrukcije.

Učenik samostalno svojim tempom prati i izvršava konstrukciju te promatra trag koji ostavlja točka A dok pomiče točku K po kružnici. Ovakav način rada možemo primijeniti ili ako već imamo gotove materijale za određenu temu ili ako sami umijemo prirediti takve materijale. S obzirom na mogućnost programa *GeoGebra* koji ima vrlo jednostavan izvoz dinamičkog uratka u web stranicu, preporučam svima koji su svladali osnove programa da pokušaju sami napraviti takav materijal. Iznenadit ćete se kako to nije teško. Važno je napomenuti da na ovaj način do konstrukcije učenik dolazi vlastitim naporom, čime se izbjegava mogućnost da mu pobjegnu pojedini dijelovi prezentacije ili da jednostavno izgubi tok konstrukcije. Kvalitetniji rezultati dobit će se ako učenik samostalno rješava problem nego ako mu prezentiramo dinamički uradak na platnu. Ovdje broj ponuđenih alata treba ograničiti samo na one koji su neophodni pri izvršavanju tražene konstrukcije. Na taj način ćemo spriječiti posljedice nepravilne uporabe programa i ograničiti pogreške učenika prilikom *igranja* s ostalim alatima.



Koraci konstrukcije

- 
- Diagram showing a circle with center S and radius $r = 3$. A horizontal line t is tangent to the circle at point T . A point K is marked on the circle's circumference. A small blue dot is on the line t to the left of T .
1. Odaberite alat  i kliknite mišem negdje na kružnicu. Zatim kliknite desnom tipkom miša na konstruiranu točku u u padajućem izborniku odaberite **Preimenuj**, a u dijaloški okvir upišite **K** i zatim pritisnite **Primijeni**.
 2. Odaberite alat  pa kliknite na točku **K** a zatim na tangentu **t**.
 3. Odaberite alat  i kliknite na dobivenu okomicu i na tangentu **t**. Dobivenu točku preimenujte (vidi korak 1.) u **L**.
 4. Da bi dobili pravac **KT** odaberite alat  i kliknite redom točke **K** i **T**.
5. Točku simetričnu točki **L** u odnosu na pravac **KT** dobit ćete tako da odaberete alat  pa kliknete na točku **L** i zatim na pravac **KT**. Preimenujte dobivenu točku u **A**. Da bi točka **A** prilikom pomicanja ostavljala trag kliknite desnom tipkom miša na točku u padajućem izborniku i označite **Uključi trag**.
6. Odaberi alat  te označi točku **K** i ne ispuštajući tipku miša povlači ju po kružnici. Kakvu krivulju pri tom opisuje točka **A**?

Nakon što su učenici izveli konstrukciju i dobili geometrijsko mjesto točaka, možemo napraviti raspravu o zadatku.

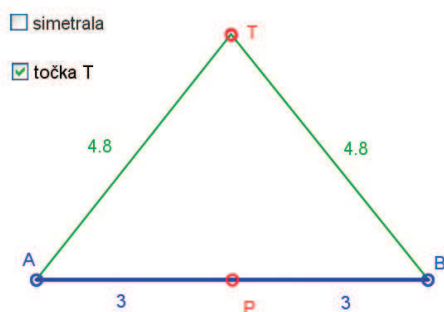
Primjer 4: Geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od rubova zadane dužine.

Usporedimo na ovom zadatku dva načina izvođenja – uz pomoć projektora kao prezentaciju i samostalnim radom učenika na računalu.

Prvi način: nastavnik izvodi konstrukciju na računalu i prezentira je učenicima, objašnjava im potrebne činjenice i ispituje svojstva točaka. Veliku

pomoć kod ovoga imat će alat  – kontrolni

okvir za prikaz i skrivanje objekata. Prema potrebi mogu se skrivati ili pokazivati pojedini dijelovi konstrukcije koji su u određenom trenutku bitni i na njih učenik treba usredotočiti pažnju.



Drugi način: učenici samostalno rade za računalom preko materijala koji se mogu instalirati na računalu ili im mogu pristupiti *on line*.

Ovom materijalu možete pristupiti na adresi <http://public.carnet.hr/~ssuljic/cjeline/trokut/>. Na sličan su način obrađene još neke teme. Tako na primjer možete obrađiti krivulje drugog reda kao geometrijsko mjesto točaka sa zadanim svojstvima pomoću materijala za samostalni rad učenika za računalom. Prednost ovakvog načina rada je u tome što učenik otkriva činjenice i zakonitosti samostalno. Motiviranost je puno veća i može učiti vlastitim tempom a ne tempom koji mu je nametnut od strane nastavnika ili ostatka razreda. Uz to, može na stranice navratiti i izvan nastave, kod kuće ili od bilo kojeg računala s vezom na internet. No ovakvi se materijali ne moraju izvoditi *on line*. Dovoljno ih je snimiti na disk ili na CD te pokrenuti *off line*.

Zablude

Program *GeoGebra* ili bilo koje druge programe dinamičke geometrije i/ili algebre treba na osnovnoškolskom i srednjoškolskom nivou obrazovanja koristiti s velikom dozom opreza, uz dobro pripremljene i metodički obrađene nastavne jedinice i ne prečesto. Učenik treba izvoditi konstrukcije i geometrijske crteže na klasičan način, koristeći matematički pribor i olovku jer samo tako će svladati potrebna osnovna znanja. Samo povremeno koristit ćemo računalu u usvajanju novih nastavnih cjelina ili prilikom ponavljanja sadržaja, i to samo u onim elementima u kojima računalu ima prednost nad statičnim crtežom na ploči ili grafoskopu. Pri-

Pokušaj pomicati točku **T** u apletu tako da njena udaljenost od obje rubne točke dužine uvijek bude jednaka.

Simetrala dužine je pravac koji je okomit na dužinu i prolazi njenim polovištem.

Mijenjajući položaj točkama **A** i **B**, uvjeri se da je svaka točka na simetrali dužine **jednako udaljena** od rubnih točaka dužine tako da klikneš na gumb i pomiči točku **M**.

Vrijedi i obrat: *Ako je neka točka ravnine jednako udaljena od krajnjih točaka dane dužine tada ona pripada simetrali te dužine.*

mjere materijala za samostalno učenje na računalu možete naći na adresi

<http://public.carnet.hr/~ssuljic/>.

Nastavnici često *upadaju u zamku* kod izvođenja nastave uz pomoć računala smatrajući da je samom uporabom računala učenik usvojio temu koja se obrađivala, bez dodatne rasprave, ponavljanja i rješavanja zadataka za vježbu. To je velika zablude jer koliko god radili s modernom tehnologijom način usvajanja gradiva ići će sporo i klasičnim putem – uvod, obrada, vježbanje, ponavljanje i sistematiziranje gradiva. Zato je najgore što možemo učiniti obraditi neku cjelinu uz pomoć računala i zatim odmah nakon toga napraviti provjeru znanja i podijeliti ocjene. Nikada se ne rade provjere znanja odmah nakon obrađene cjeline. Prvo idu zadaci za vježbu i ponavljanje i tek nakon toga možemo provesti provjeru znanja. Dakle, i kod obrade sadržaja uz pomoć računala trebalo bi se držati čitavog tog slijeda.

Računalo ne bi trebalo shvatiti kao čarobni štapić koji će riješiti sve probleme. Ne bi ga trebalo koristiti u svim situacijama i nikako ne bez dobro razrađenih priprema. Poželjno je učenicima koji rade na računalu podijeliti radne listiće koje ispunjavaju usporedno ili nakon obrade sadržaja na računalu kako bismo im pitanjima skrenuli pažnju na bitne elemente nastavne jedinice koje trebaju usvojiti ili kako bi ponovili najvažnije dijelove.

Priprema za nastavu uz pomoć računala u početku zahtijeva više truda i nastavniku se može učiniti

nerazmjernan odnos vremena kojeg utroši i uspjeha kojeg pokažu učenici. No, dugoročno se trud pokaže isplativim a uporaba računala je sve lakša, nastavnik troši manje vremena, a sama nastava pruža veće zadovoljstvo i nastavniku i učenicima. Ako se ohrabrite, slobodno me kontaktirajte e-poštom na adresu ela.kragic-marinic@skole.hr za svaku nedoumicu, pitanje, pomoć ili sugestiju.

Zaključak

Uporaba programa *GeoGebra* u razredu pomoći će u stvaranju geometrijskog zora i intuitivnog pristupa koji u školama pomalo gube bitku s računom. U izgradnji matematičke misli ponekad su važnije predodžbe i zornost od suhoparnog računa iza kojeg ne leži suštinsko poimanje problema. Često i nakon što je riješio zadatak, učenik nije svjestan što je izračunao i kakvo je geometrijsko značenje rezultata. Učeniku je dobrodošla svaka pomoć u stvaranju geometrijske predodžbe. Programi dinamičke geometrije u tome su napravili i korak naprijed – uz vizualnu predodžbu daju i dinamičku dimenziju predodžbi. *GeoGebra* je tu napravila još jedan korak dalje. Uz geometrijsku predodžbu i dinamiku ona nudi i algebarski zapis koji se uz tu predodžbu veže. Tako učenik ovaj program može koristiti kao pomoć u stvaranju geometrijskog zora, ali i za provjeru pretpostavki i točnosti svojih algebarskih izračuna, te za kontrolu rezultata.

12210.
Branimir Dakić:
Ispiti znanja
iz matematike
za 1. razred
gimnazije



12220.
Branimir Dakić:
Ispiti znanja
iz matematike
za 2. razred
gimnazije



www.element.hr

novo