Igra u kompleksnoj ravnini

Šime Šuljić, Pazin

Digitalni urođenici

Ovog je siječnja na državnom seminaru za učitelje i nastavnike matematike bilo više zanimljivih predavanja koja su analizirala suvremeni trenutak u kojima funkcionira škola pa samim time i nastava matematike. Tu svako treba izdvojiti prezentaciju *Nove generacije učenika i studenata* (`www.azoo.hr/tekst/drzavni-seminari-za-ucitelje-i-nastavnike-matematike/444`) prof. dr. sc. Pera Lučina. Riječ je o tome da naši učenici pripadaju generaciji koja se toliko intenzivno i široko koristi mobitelima i računalima da možemo govoriti o "digitalnim urođenicima". Između nas i njih je jaz – mi smo u tom svijetu tek pridošlice. Dok mi u taj svijet ulazimo linearno, postupno i poučavani tečajevima, oni ulaze kaotično, napreskokce i otkrivajući ga sami.

Ali osim jaza između nas i učenika postoji još jedan, ne toliko dubok, procijep između nastavnika matematike koji su doživjeli uzbuđenje uzrokovano matematičkim sadržajima u okružju informacijsko komunikacijske tehnologije i onih koji se nikada nisu susreli sa *živim* matematičkim objektima na veličanstvenom web-mjestu `http://mathworld.wolfram.com`. Jedan od razloga zbog kojeg su učenici toliko duboko uronili u te svoje svjetove svakako jest **zabava** koju im tehnologija pruža. U ovom sam članku posegnuo za matematičkim sadržajima koji nam u *GeoGebri* prije svega mogu biti zabavni, pa kada se s tehnologijom zbližimo rutinski je kasnije možemo koristiti u nastavi.

Kompleksna ravnina

Kompleksne brojeve možemo predočiti točkama koordinatnog sustava, što znači da ih na isti način možemo tretirati i na *GeoGebrinoj* crtaćoj plohi. Tako točka $T(x, y)$ predstavlja kompleksni broj $z = x + yi$. Želimo li točki T dodijeliti dinamični zapis tog oblika, tada je potrebno odabrati alat ABC za umetanje teksta i kliknuti na točku. U dijaloškom okviru valja upisati:

$$\text{“}z\text{=”} + (x(T)) + \text{“+”} + (y(T)) + \text{“}i\text{”}.$$

Zbroj dvaju brojeva koje prezentiraju dvije točke A i B bit će nova točka C kojoj koordinate kroz polje za unos definiramo ovako: $(x(A) + x(B), y(A) + y(B))$. Umnožak dvaju kompleksnih brojeva $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ je $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. To znači da je u polje za unos potrebno upisati:

$$C = (x(A) * x(B) - y(A) * y(B),$$
$$x(A) * y(B) + y(A) * x(B)),$$

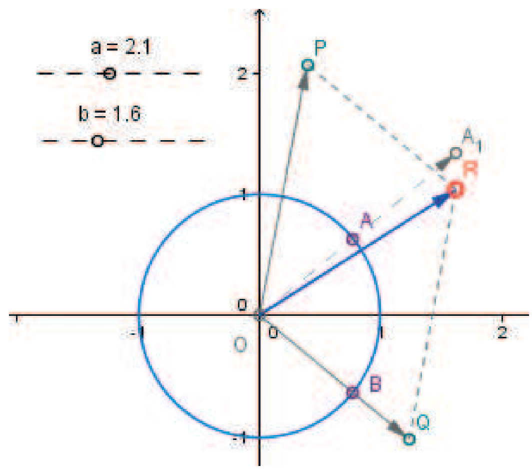
uz napomenu da za množenje varijabilnih elemenata umjesto zvjezdice možemo koristiti i prazno mjesto tj. razmaknicu na tipkovnici. Dodamo li tome da množenje kompleksnog broja kojeg prezentira točka T s realnim brojem a možemo izvesti vrlo jednostavno upisom $(a\,x(M), a\,y(M))$, već možemo izvesti vrlo efektan eksperiment dinamičnog prikaza.

Metamorfoze kružnice

Promotrimo jedno neobično preslikavanje kružnice u kompleksnoj ravnini. Pravilo po kojem se točka A kružnice preslikava u neku drugu točku ravnine razabrat ćete iz priložene slike naredbenih redaka koje se kroz polje za unos zadaju GeoGebri.

1. Upišite a=3 i pritisnite [Enter] i potom isto tako b=2. Kasnije kroz izbornik Uređivanje>Svojstva možete odrediti granice tim parametrima npr. od 0 do 4.
2. Nacrtajte kružnicu sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava polumjera 1. Naredba: c = Kružnica[(0, 0), 1].
3. Na kružnici nacrtajte točku naredbom: A = Točka[c].
4. Njoj konjugirana točka bit će točka: $B = (x(A), -y(A))$.
5. Da bismo pomnožili kompleksni broj kojeg predstavlja točka A brojem a, potrebno je upisati naredbu: $A1 = (a\,x(A), a\,y(A))$.
6. Isto učinite s točkom B i brojem b: $Q = (b\,x(B), b\,y(B))$.
7. Sada valja pomnožiti broj koji predstavlja točka A s brojem koji predstavlja točka A_1, naredbom: $P = (x(A\_1)\,x(A)$ - $y(A\_1)\,y(A), x(A\_1)\,y(A) + y(A\_1)\,x(A))$.
8. Na kraju zbrojite "brojeve" P i Q naredbom $R = (x(P) + x(Q), y(P) + y(Q))$.

   Napomena: na priloženoj slici može se uočiti da se zbrajanje kompleksnih brojeva zapravo svodi na zbrajanje radijvektora.

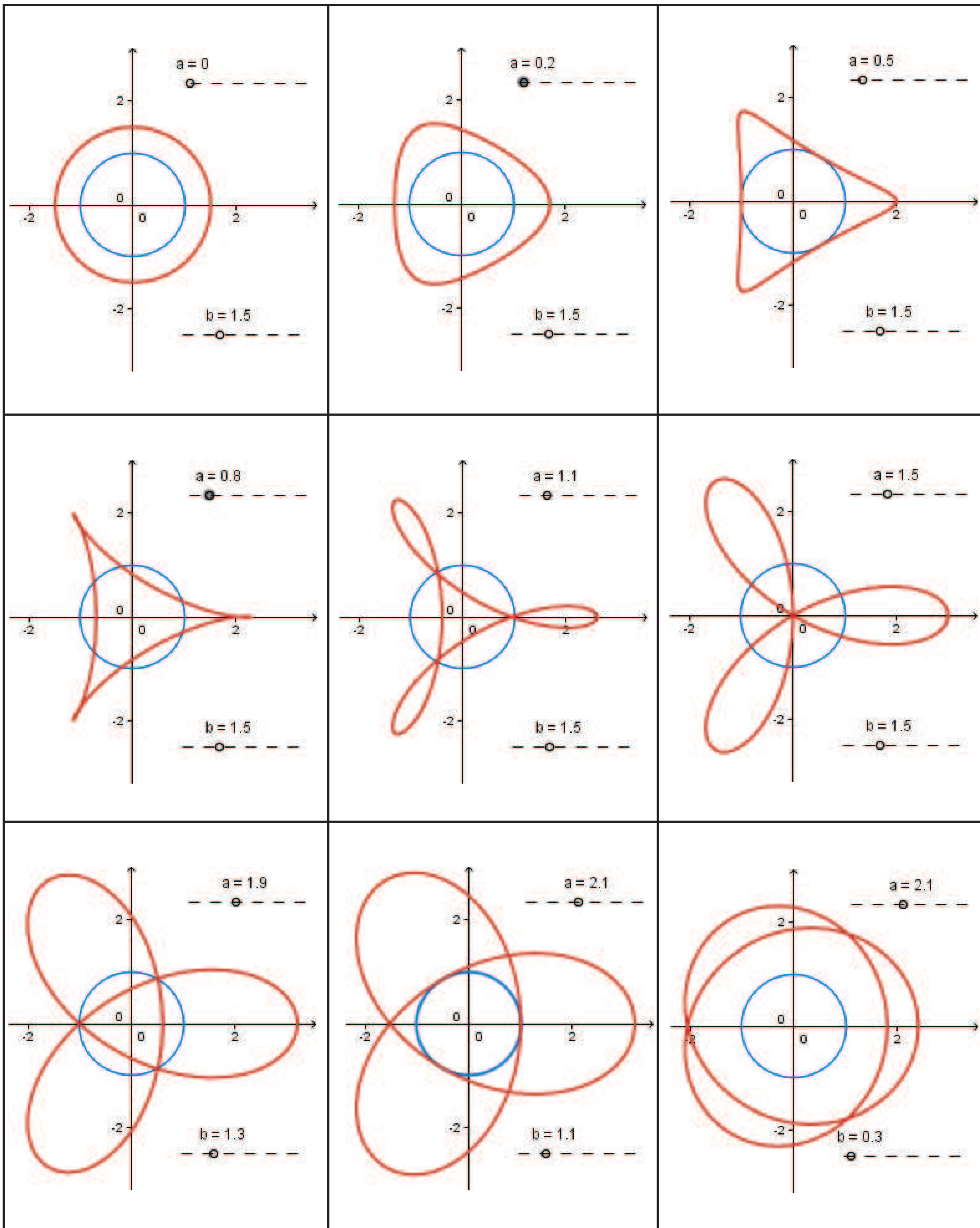


Slika 1

Pomičite sada točku A po kružnici i uočite vrlo "čudno" gibanje točke R. Možete desnim klikom na točku R uključiti ostavljanje traga, ali pravi dojam steći ćete konstrukcijom skupa svih točaka koje opisuje točka R. Zadajte naredbu Lokus[R, A], a zatim pomičite *klizače* a i b. Dobiveni oblici doista su zanimljivi. Pogledajte galeriju slika.

Jednadžbe, jednadžbe – to je matematika!

Prirodno nam se nameće pitanje može li sve te oblike opisati jedna jedina jednadžba. Vratimo se slici 1. Za to nam je najpogodnije prikazati kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku, odnosno točke ravnine prikazati polarnim koordinatama. Svaku točku određuje njezina udaljenost r od ishodišta, odnosno modul kompleksnog broja koji je pridružen toj točki i kut φ kojeg određuje radijvektor te točke s pozitivnim dijelom osi apscise, odnosno argument kompleksnog broja pridruženog točki. Ako je točka A udaljena od ishodišta 1 i ako kut koji njezin radijvektor određuje s osi x nazovemo t, onda ona predstavlja kompleksni broj:


a = 0
b = 1.5
a = 0.2
b = 1.5
a = 0.5
b = 1.5
a = 0.8
b = 1.5
a = 1.1
b = 1.5
a = 1.5
b = 1.5
a = 1.9
b = 1.3
a = 2.1
b = 1.1
a = 2.1
b = 0.3

$$z_A = \cos t + i \sin t.$$

Napomenimo da u *GeoGebri* u svakom trenutku koordinate točke možemo prikazati u polarnim koordinatama desnim klikom na točku i odabirom iz skočnog izbornika. Kada se točka zadaje u polarnim koordinatama, potrebno je umjesto zareza koristiti točku-zarez npr. (2;45°).

Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku svodi se na množenje njihovih modula i zbrajanje argumenata. Kako brojevi z_A i z_{A_1} imaju jednake argumente t i module 1 i a, njihov je umnožak:

$$z_P = a(\cos 2t + i \sin 2t).$$

Konjugirano kompleksni broj broja z_A je broj s argumentom $2\pi - t$, zbog čega je broj pridružen točki Q:

$$z_Q = b(\cos t - i \sin t).$$

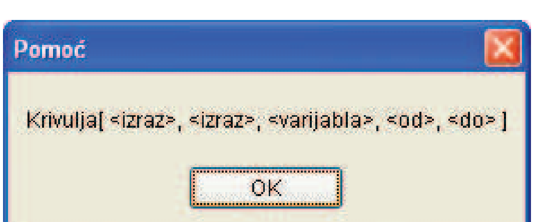
Zbrojimo li brojeve z_P i z_Q, dobit ćemo rezultat:

$$z_R = (a \cos 2t + b \cos t) + (a \sin 2t - b \sin t)i.$$

Upravo takav zapis broja z_R osnova je za parametarsku jednadžbu dobivene krivulje. Jednadžbu u *GeoGebri* kroz polje za unos zapisat ćemo naredbom:

Krivulja[a cos(2 t) + b cos(t),
a sin(2 t) - b sin(t), t, 0, 2π].

Napomena. Kada upisujete neku naredbu u polje za unos, pritisnite tipku F1 za pomoć. U ovom slučaju ona izgleda ovako:



Ako ste dobro upisali jednadžbu, dobivenu krivulju praktički nećete ni vidjeti jer je prekriva ranije dobivena krivulja naredbom Lokus. Naglasite krivulju dobivenu jednadžbom promjenom boje ili debljine i uočite da s promjenom klizača a i b ne dolazi do nikakvog odstupanja dviju krivulja.

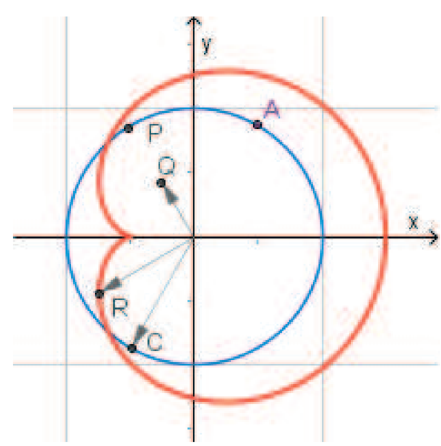
Kardioida

Kardioidu je u računalnim programima dinamične geometrije moguće dobiti iz njezine geometrijske definicije. Ovdje ćemo je konstruirati kao skup točaka kompleksne ravnine ali se nećemo toliko baviti algebrom kompleksnih brojeva, već ćemo u prvi plan staviti jednostavnost uporabe *GeoGebre*.

Kao u prethodnom primjeru, krenimo od kružnice polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Isto tako neka se na njoj nalazi točka A. Potrebno je nacrtati kompleksni broj koji odgovara kvadratu kompleksnog broja pridruženog točki A. Kako je modul broja pridruženog točki A jednak 1, to je i modul kvadrata tog broja 1 s tim da je argument kvadrata dva puta veći od argumenta početnog broja. Stoga je u polje za unos dovoljno upisati ovakvu naredbu:

P = (1; 2 Kut[A]),

gdje znak točka-zarez upućuje program da shvati zapis kao polarne koordinate.



Točka Q predstavlja kompleksni broj koji se dobije množenjem broja pridruženog točki P s brojem 0.5. U *GeoGebri* to možemo postići vrlo jednostavno ovako: $Q = ½ P$. Točku C treba konstruirati kao broj suprotan broju pridruženom točki A. I ovo je moguće vrlo jednostavno dobiti upisom $C = -A$. I na kraju točka R, koju vidite na slici, dobivena je kao zbroj brojeva pridruženih točkama Q i C, a naredbom $R = Q + C$. Na kraju je kardioida dobivena naredbom Lokus[R, A].

Zadatak. Nađite parametarsku jednadžbu kardioide.

Korijeni kompleksnog broja

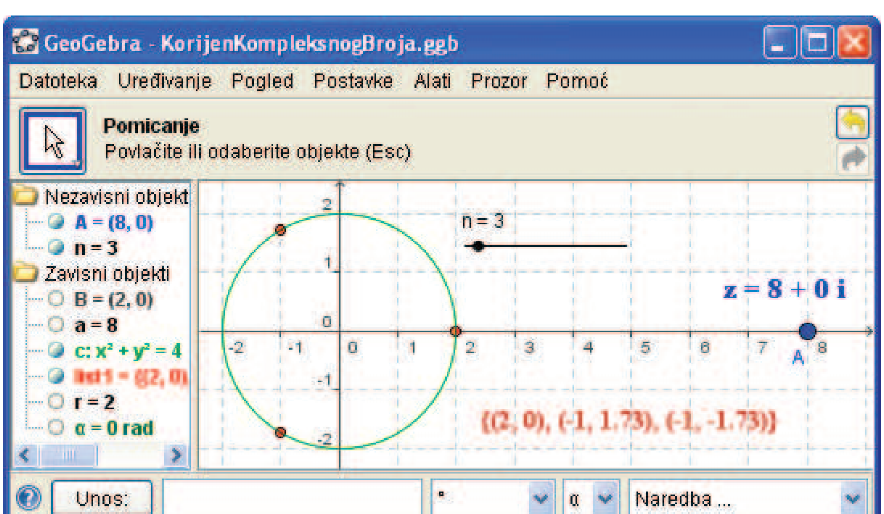
Za razliku od prethodih dvaju primjera za ovaj bismo mogli pomisliti: evo nečeg korisnog. Doista, ovaj se primjer nalazi u redovnom programu četvrtog razreda srednje škole, no ta činjenica ne utječe na važnost u općem matematičkom smislu. Valjalo bi preispitati opravdanost obrade ove teme u redovnom programu. Ako je nužna, možda bi se bolje uklopila u trigonometriju trećeg razreda. Kod zadavanja zadataka vađenja n-tog korijena kompleksnog broja možda ima mjesta i za računalo. Dakle, traži se algoritam kojim bi se moglo izračunati sve n-te korijene iz proizvoljnog kompleksnog broja. Softverom dinamične geometrije naravno ćemo uz računski algoritam dobiti i zornu predodžbu. Upravo to vidimo na slici. Ulazni parametri su točka A, koju slobodno možemo povlačiti po koordinatnom sustavu, i klizač n, stupanj korijena, koji se može mijenjati. Izlazne vrijednosti su korijeni kompleksnog broja predočeni točkama u koordinatnom sustavu i niz algebarskih zapisa tih brojeva.

Kako to izraditi? U nekoliko koraka kroz polje za unos:

1. $A = (4, 2)$ – ovako zadana točka pomična je točka, a ovo je samo njezina početna vrijednost.
2. $n = 8$ – proizvoljna vrijednost stupnja korijena kojeg ima smisla ograničiti na najmanju vrijednost 2 preko dijaloškog okvira *Svojstva*.
3. Modul broja z pridruženog točki A je $a =$ sqrt($x(A)^2 + y(A)^2$).
4. Modul n-tog korijena bit će: a^(1 / n).
5. Argument broja z je $\alpha =$ Kut[A].
6. Prvi korijen u nizu dobije se naredbom $B = r$ (cos(α / n), sin(α / n)).
7. Prikaz svih korijena dat će naredba Niz[Rotacija[B, 2 k π / n], k, 0, n - 1].

Broj bi se koraka dao još umanjiti ukoliko se koriste ugniježđene naredbe. Recimo koraci 3., 4., 5. i 6. mogu se zamijeniti jednom naredbom:

$B =$ sqrt($x(A)^2 + y(A)^2$)^(1 / n)
(cos(α / n), sin(α / n)).



Za kraj

Svakako vam preporučam da u *Geogebri* pokušate izraditi ove primjere. Nadam sam da će vam to biti ugodna zabava, a uvjeren sam da će mnogi od vas neke detalje izvesti elegantnije i/ili konstruirati neke drukčije krivulje.