Hugo Steinhaus:
Šunke i pite

Dragi MiŠ-ovci, premda je Uskrs već prošao, vjerujem da je mnogima još uvijek u ustima okus uskršnje šunkice i finih kolača. Tek toliko da vam opet malo "zamirišim", priredila sam vam dva simpatična zadatka. Prenosim ih iz poznate knjige dr. Huga Steinhausa, **Sto problema elementarne matematike**, čiji će se prijevod uskoro pojaviti među *Elementovim* izdanjima.

Sandra Gračan

Izletnička šunka

Tri susjede dale su svaka po 40,00 kn i kupile šunku (bez kože, masnoće i kostiju). Jedna od njih podijelila je šunku na tri dijela tvrdeći da su svi dijelovi jednako teški. Druga susjeda izjavila je da vjeruje jedino vagi iz obližnje trgovine. Pokazalo se da dijelovi, koji su trebali biti jednaki, odgovaraju novčanim vrijednostima od 30,00 kn, 40,00 kn i 50,00 kn redom. Treća sudionica odlučila je izvagati šunku na svojoj kućnoj vagi, što je opet dalo različit rezultat. To je dovelo do svađe, jer je prva žena uporno tvrdila da je njezina podjela poštena, druga je vjerovala samo vagi iz dućana, a treća samo svojoj kućnoj vagi. Na koji način je moguće razriješiti ovu svađu te podijeliti dijelove šunke (bez ponovnog rezanja) tako da svaka žena može reći kako ima barem 40,00 kuna vrijedan komad šunke prema mjerenju kojem vjeruje?

Rješenje

Svađu je moguće riješiti na sljedeći način: prednost biranja komada šunke dajemo trećoj suvlasnici. Ona će, naravno, odabrati dio koji je prema njezinoj kućnoj vagi najteži i po njezinom mišljenju vrijedi više od 40,00 kn. Takav komad mora postojati, jer svakim dijeljenjem cjeline na 3 dijela, jedan od dijelova mora imati težinu veću ili jednaku $\frac{1}{3}$ ukupne težine cjeline.

Nakon toga svoj komad šunke bira druga žena. I ona mora biti zadovoljna jer, nakon što je treća žena izabrala svoj komad, među preostala dva komada nalazi se onaj koji je, prema vagi iz dućana, najteži.

I prva žena, kojoj pripadne posljednji komad šunke, trebala bi biti zadovoljna s obzirom da smatra kako su sva tri komada jednako teška.

Dijeljenje pite

Marko i Janko trebaju podijeliti komad pite u obliku trokuta. Janko je rekao da će svoj dio odrezati jednim ravnim rezom i Marko se s tim složio. Međutim, Marko je zahtijevao pravo da odredi točku P na piti kroz koju mora proći Jankov rez. Kako je pita svugdje jednako debela, a također i svugdje jednako ukusna, problem se sveo na pitanje iz planimetrije koje glasi: na koji način Marko treba označiti točku P da se obrani najbolje što može od pohlepnog Janka? I drugo pitanje: koliki će višak pite Janko dobiti ako za sebe odreže najveći mogući komad, nakon što je Marko ispravno riješio prvi problem?

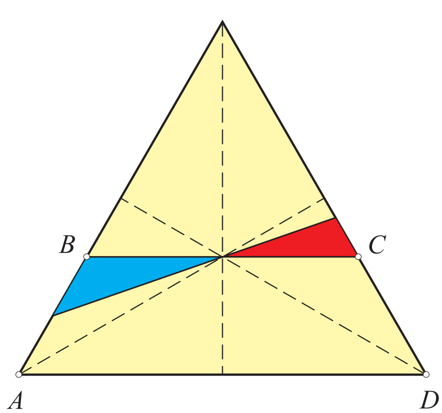
Kad bi oblik komada pite ovisio o Marku, tada bi on sigurno izabrao lik koji ima središte (krug, kvadrat, elipsu itd.), i onda bi točku P označio u središtu. U tom slučaju Jankova bi privilegija postala beznačajna.

Još zanimljivije pitanje glasi koji bi oblik pite (uz iste uvjete podjele) bio najpovoljniji za Janka, te koji bi najveći mogući višak pite Janko mogao sebi osigurati odabirom tog oblika?

Rješenje

Ako Marko za točku P odabere težište trokuta, najbolje je za Janka da njegov rez bude paralelan jednoj od stranica trokuta (slika 1).

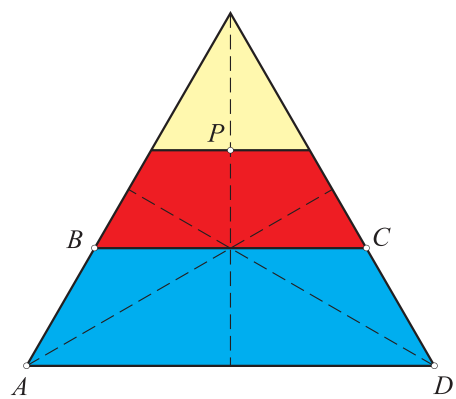
Dokazati tu tvrdnju znači pokazati da je površina crvenog trokuta na slici manja od površine plavog



Slika 1.

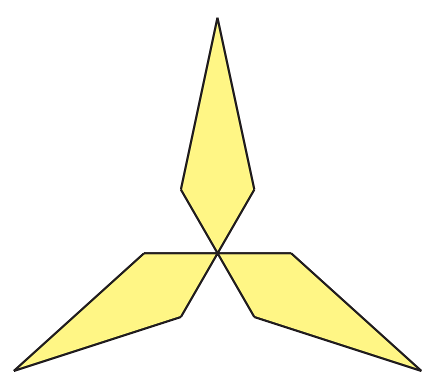
trokuta. Površina trapeza $ABCD$ jednaka je $\frac{5}{9}$ površine cijele pite, pa je višak određen omjerom $5{:}4$.

Lako se pokaže da je izbor težišta trokuta najbolji za Marka, jer bilo koja druga točka P omogućila bi Janku da odreže ne samo trapez $ABCD$, već i dodatni komad pite (slika 2).



Slika 2.

Vama prepuštamo odgovor na preostala pitanja.



Slika 3.

U svakom slučaju lako je pokazati da ako pita ima neobičan oblik prikazan na slici 3, onda za bilo koji izbor točke P Janko može odrezati barem $\frac{2}{3}$ pite. Konačno, predlažem vam da pokušate dokazati kako nijedan oblik pite ne daje mogućnost Janku da odreže više od $\frac{3}{4}$ površine.