Radionica
"Pomozite Josephu Kruskalu!"

Sanja Rukavina, Marija Sekulić,
Andrea Švab, Sanja Vranić, Rijeka

Mnoga matematička znanja koja intuitivno uspješno primjenjuju u svakodnevnom životu učenici nikada neće imati priliku i formalno upoznati tijekom svog školovanja. U području diskretne matematike možemo naći brojne takve primjere koji nisu sadržani niti u osnovnoškolskim niti u srednjoškolskim pa čak niti u visokoškolskim programima matematike budućih nematematičara.

Svijest o tome da pri rješavanju nekog problema koristimo matematička znanja može u učenika poljuljati često prisutan stav o nesvrsishodnosti učenja matematike i djelovati motivacijski na ulaganje daljnjih napora u svladavanju matematičkih sadržaja. Idealna prilika da se odškrinu vrata matematike koje nema u školskom udžbenicima pruža se nastavnicima uvođenjem aktivnog učenja i realizacijom projekata u suradnji s nastavnicima drugih predmeta.

Na tragu ovakvih razmišljanja nastala je i radionica "Pomozite Josephu Kruskalu!" u kojoj se učenici na nenametljiv način upoznaju s poznatim problemom Königsberških mostova i s Kruskalovim algoritmom. Pritom se, naravno, ne inzistira na njihovom strogom iskazivanju i pamćenju već se spominju kao logični način rješavanja postavljenih problema.

Kruskalov algoritam

Prije no što Kruskalov algoritam prikažemo u kontekstu radionice za učenike, prisjetimo se nekih osnovnih pojmova teorije grafova te Kruskalovog algoritma.

Graf G s n vrhova je struktura koju čine n vrhova i spojnice tih vrhova (bridovi). Graf koji ima samo jednu komponentu (od svakog je vrha grafa moguće doći do bilo kojeg drugog vrha grafa prolazeći njegovim bridovima) je povezan graf.

Šetnja u grafu G je netrivijalan konačan niz: $W = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$, gdje su $v_0,...,v_k$ vrhovi grafa $G, a, e_1,...e_k$ bridovi grafa G.

Šetnja je **zatvorena** ako ima pozitivnu duljinu (sadrži najmanje dva brida) i ako se početni i krajnji vrhovi podudaraju.

Ciklus je zatvorena šetnja kod koje su svi vrhovi, osim početnog i krajnjeg, međusobno različiti.

Stablo je graf koji ne sadrži cikluse.

Težina brida je numerička vrijednost koja se pridružuje bridu (ovisno o kontekstu, težina može biti duljina, cijena, vrijeme...).

Težina grafa je zbroj svih težina bridova tog grafa.

Primjer.

Problem koji se rješava primjenom Kruskalova algoritma je problem određivanja minimalnog razapinjućeg stabla u težinskom povezanom grafu. Drugim riječima, potrebno je odrediti podgraf (bez ciklusa) zadanog grafa tako da se obuhvate svi vrhovi polaznog grafa te da ukupna težina odabranih bridova bude najmanja moguća. Rješenje ovog problema ne mora biti jedinstveno za zadani graf.

Kruskalov algoritam

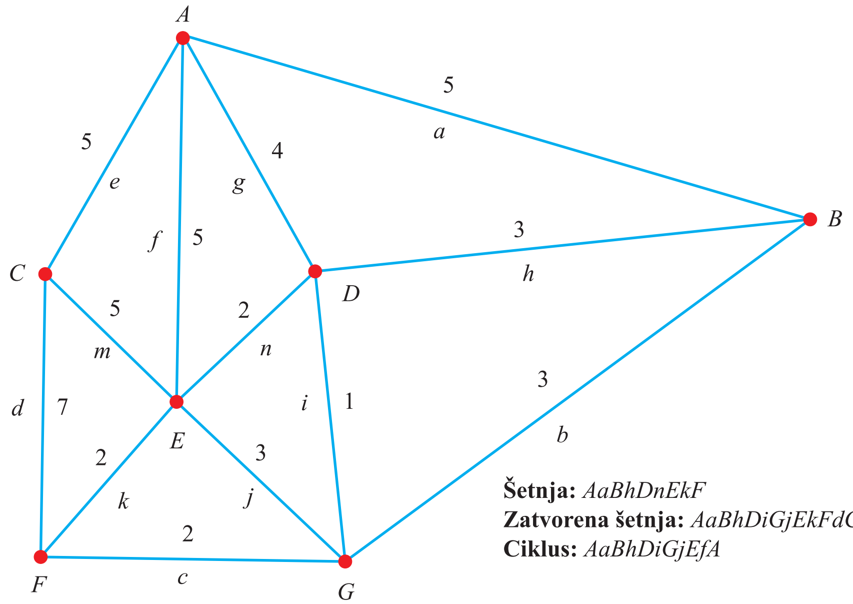
1. Odaberimo brid tako da je težina brida minimalna.
2. Svaki sljedeći brid biramo tako da:

   a) odabrani bridovi ne zatvaraju ciklus,

   b) taj brid ima minimalnu težinu među preostalima i zadovoljava uvjet a).
3. Algoritam završava kada drugi korak više ne možemo provesti.

Primijenimo Kruskalov algoritam na prethodni primjer (Slika 1):

1. Odaberimo brid minimalne težine: to je brid i.
2. Sljedeći brid minimalne težine uz uvjet a) je brid k.



Šetnja: $AaBhDnEkF$
Zatvorena šetnja: $AaBhDiGjEkFdCmEfA$
Ciklus: $AaBhDiGjEfA$

Slika 1.

Sljedeći brid minimalne težine uz uvjet a) je brid n.

Sljedeći brid minimalne težine je brid c, ali taj brid zatvara ciklus s prethodno navedenim bridovima pa ga odbacujemo.

Sljedeći brid minimalne težine je brid j, ali taj brid zatvara ciklus s prethodno navedenim bridovima pa ga odbacujemo.

Sljedeći brid minimalne težine uz uvjet a) je brid h.

Sljedeći brid minimalne težine je brid b, ali taj brid zatvara ciklus s prethodno navedenim bridovima pa ga odbacujemo.

Sljedeći brid minimalne težine uz uvjet a) je brid g.

Sljedeći brid minimalne težine je brid a, ali taj brid zatvara ciklus s prethodno navedenim bridovima pa ga odbacujemo.

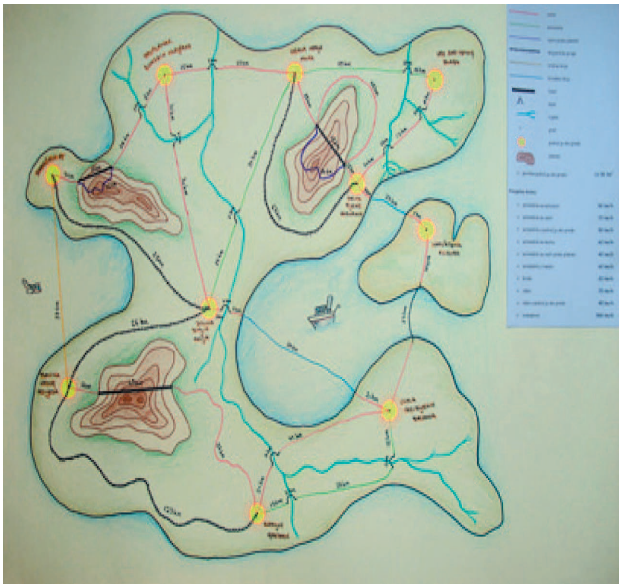
Sljedeći brid minimalne težine je brid f, ali taj brid zatvara ciklus s prethodno navedenim bridovima pa ga odbacujemo.

Sljedeći brid minimalne težine uz uvjet a) je brid e.

Na opisani smo način Kruskalovim algoritmom dobili podgraf koji obuhvaća sve vrhove početnog grafa, ne sadrži ciklus i ima minimalnu težinu koja iznosi 17 $(1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17)$.

O radionici

Nakon što su učenici podijeljeni u grupe od 4 do 6 učenika u uvodnom ih se dijelu radionice upoznaje s poznatim problemom Königsberških mostova te činjenicom kako je rješenje tog problema dao poznati matematičar Leonhard Euler. Služeći se matematičkim jezikom, primjerenim uzrastu učenika, tumači se i rješenje problema. Nakon toga se učenici upoznaju s problemom pred kojim se trenutno nalazi jedan drugi matematičar Joseph Kruskal. On u nedostatku vremena pokušava obići *Izgubljenu zemlju* na način da svaki grad te zemlje posjeti točno jednom i u što kraćem vremenu. Učenici se stavljaju u ulogu pomagača matematičaru Josephu Kruskalu koji ih je zamolio za pomoć pri rješavanju problema pred kojim se našao. Na temelju danih podataka iskazanih na karti *Izgubljene zemlje* i *legende znakova* koja se nalazi na karti, moraju pokušati obići zemlju u najkraćem mogućem vremenu tako da ne prođu dva puta istim gradom. Odatle i naslov radionice "Pomozite Josephu Kruskalu!". Cilj radionice je otkriti strategiju kojom će uspjeti izvršiti zadatak. Nakon toga će voditelji radionice povezati zadatak s Kruskalovim algoritmom.



Slika 2.

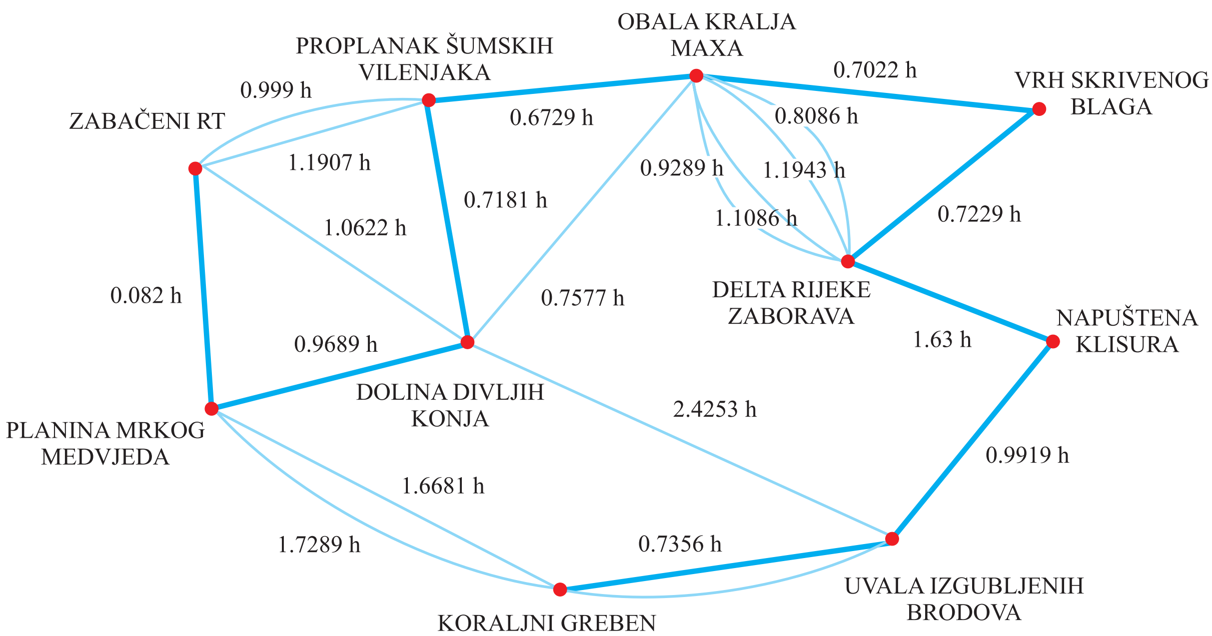
Na karti je ucrtano 10 gradova i mnoštvo putova od kojih je samo jedan onaj kojim se *Izgubljena zemlja* prođe u najkraćem vremenu tako da se svakim gradom prođe točno jednom. Upisane su i različite duljine određenih dionica bilo da se radi o cesti, autocesti, pruzi... Na *legendi znakova* ucrtani su pojmovi koji se koriste na karti kao npr. planina, most, rijeka... kao i prosječne brzine različitih prijevoznih sredstava koje učenici mogu koristiti za svoje putovanje *Izgubljenom zemljom* (automobil, vlak, brod, avion). Također je ucrtano i područje oko grada u kojem se (kao i u stvarnom životu) vozi sporije, pa su navedene i prosječne brzine prijevoznih sredstava u području oko grada koje se razlikuju od onih prije navedenih.

Za rješavanje ovako postavljenog zadatka učenicima će trebati formula za izračunavanje površine kruga i formula za izračunavanje brzine. Te su im formule cijelo vrijeme dostupne i projiciraju se na zidu učionice. U ovisnosti o uzrastu učenika potrebno ih je manje ili više tumačiti. Radionicu smo izvodili s učenicima šestih, sedmih i osmih razreda s jednakim uspjehom. Dok je učenicima šestih razreda uporaba ovih formula (vođena od strane nastavnika) bila tek naznaka onoga što će kasnije učiti (u matematici i fizici), učenicima osmih razreda predstavljala je ponavljanje sadržaja s kojima su se već upoznali. Uporaba ovih formula potrebna je jer se traži najbrži, a ne najkraći put pa iz podataka o duljini puta i brzini kretanja treba odrediti vrijeme potrebno da se prijeđe put između dva grada.

Rješavanju problema neke grupe prilaze na način da oblikuju manje "radne skupine" od kojih svaka izračunava podatke za jedan dio karte, u nekim grupama "podjela posla" se vrši iznova za svaka dva grada dok u nekim grupama svi učenici istovremeno računaju vrijeme trajanja istog puta kako bi na taj način provjerili dobiveni rezultat. Voditelji radionice im pomažu, odgovaraju na pitanja, provjeravaju dobivena vremena i napominju im ukoliko su nešto krivo izračunali. Pokušavaju zajedno s njima izračunati dionicu za koju su dobili pogrešan rezultat i ukazati im na grešku (npr. nisu uzeli u obzir prosječnu brzinu automobila u području oko grada, nisu izračunali dio ceste od samog grada pa do vanjskog ruba područja oko grada...).

Prvi dio posla gotov je u trenutku kad se odredi vrijeme trajanja svakog pojedinog puta. U tom su trenutku učenici i ne znajući dobili težinski graf pri čemu je težina pojedinog brida određena vremenom potrebnim da se prijeđe put koji taj brid predstavlja. Naše iskustvo pokazuje da uz vrlo malo sugestija u početnom dijelu radionice i podsjećanje na problem Konigsberških mostova i Eulerovo rješenje tog problema možemo postići prikaz zadanog problema na način kao što je to napravljeno na slici 3. Na toj je slici ujedno istaknut i najbrži put koji dobivamo primjenom Kruskalovog algoritma.

U drugom dijelu radionice učenici pokušavaju na temelju dobivenih rezultata odrediti najbrži put obilaska *Izgubljene zemlje*. Svaka grupa opisuje svoju strategiju i ispisuje rezultat do kojeg je došla. Nije za očekivati da će učenici izračunati naj-



Slika 3.

kraće moguće vrijeme, a ako se to i dogodi rijetko će takav rezultat biti posljedica dosljednog provođenja nekog algoritma. Voditelji radionice upoznat će ih s postupkom koji bi ih doveo do točnog rezultat prikazujući im zapravo primjenu Kruskalovog algoritma na konkretnom primjeru.

Završne napomene

— Osim očite korelacije s fizikom (određivanje vremena iz zadane prosječne brzine i duljine prijeđenog puta) i geografijom (čitanje geografske karte i pripadne legende) moguće je umjesto karte izmišljenje *Izgubljene zemlje* ponuditi učenicima npr. kartu muzeja u nekom gradu, kartu frankopanskih tvrđava u županiji, kartu gradova u kojima je živio neki pisac, kartu s lokacijama endemskih vrsta... te tako ostvariti korelaciju s poviješću, umjetnošću, jezikom, biologijom. Zatraži li se od njih da sami istraživačkim radom dođu do te karte ovakvi su problemi pogodni za školske projekte koji često za temu imaju županiju, rodni grad, park prirode u blizini. Problem može biti postavljen i direktnije, na način da se traži najkraći, a ne najbrži put.

— Intramatematička korelacija ovisit će o umješnosti nastavnika i situacijama koje će se javljati pri izvođenju radionice. Od učenika možemo tražiti da dobivene rezultate prikažu u satima i minutama, odrediti na koliko će se decimala zaokruživati dobiveni rezultati, malo više vremena posvetiti broju Pi koji se javlja u izrazu za površinu kruga, ...

— Uočimo da Kruskalov algoritam općenito ne sadrži u sebi uvjet da se svakim vrhom prođe „točno jednom“ te pri zadavanju karte moramo biti oprezni da se radi o zadatku kada minimalno razapinjuće stablo zadovoljava taj uvjet. Naravno da možemo zadati i zadatak u kojem navedeni uvjet nećemo postavljati.

— Pri zadavanju "karte" moramo biti svjesni činjenice da minimalno razapinjuće stablo nije jedinstveno za sve grafove pa možemo (ali ne moramo) uključiti mogućnost dobivanja različitih točnih rješenja. U tom bismo slučaju dobili još jedan bitni element završne diskusije.

— Ova radionica iziskuje puno računanja i dosta objašnjavanja te se pokazalo da je najbolje izvoditi je u vremenskom trajanju od dva školska sata.

— Učenici su bili zadovoljni sudjelovanjem u ovoj radionici, ankete koje smo proveli pokazale su da su voljni i dalje sudjelovati u ovakvom načinu rada, a radionica je ocijenjena visokom ocjenom. (Fotografija (slika 4) je snimljena u Osnovnoj školi "Zamet" u Rijeci za vrijeme održavanja radionice u okviru Festivala znanosti 2007. godine.). Dogodilo se da je jedna grupa uspjela izračunati najkraće moguće vrijeme potrebno da se svaki grad posjeti točno jednom i bili su jako ponosni na svoj rezultat, dajući ostalima do znanja kako su imali najbolju strategiju.

Slika 4.

— U okviru programa "Razvoj prirodoznanstvene pismenosti aktivnim učenjem" podržanog od MZOŠ radionica se izvodi u riječkim osnovnim školama. Nositelj programa je udruga "Zlatni rez". Do sada je provedena četiri puta u tri riječke osnovne škole.

POVEZNICE

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

[2] www.zlatnirez.hr