GeoGebro, riješi mi zadatak!

Šime Šuljić, Pazin

Svi vi, dragi čitatelji, koji pratite ovu seriju članaka svjesni ste da smo s *GeoGebrom* prošli kroz mnogošto. Sugerira li sada karta crikveničkog akvatorija da nas *GeoGebra* vodi na more? Ipak ne! Riječ je tek o terenskom zadatku koji su voditelji županijskih vijeća dobili na travanjskom seminaru u Crikvenici.

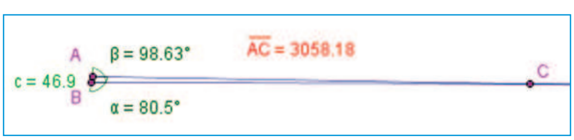
Napredni učenici na terenskom zadatku

Djelatnici Agencije u suradnji s kolegicom Ljubicom Dunđerović organizirali su nam pravu terensku nastavu s geodetskim mjerenjem i raznovrsnim i zanimljivim praktičnim zadatcima. Osim teodolita na obali i uslužnih ekipa učenika uz njih, na raspolaganju su bila i računala u sali za predavanja. Ono što me je ugodno iznenadilo je da su gotovo svi timovi posegnuli za prikazom problema i rezultata u *Geogebri* koja ih je na računalima dočekala (blagodati slobodnog softvera). Radili su to rutinski jer se očito redovito služe *GeoGebrom*. U ovom članku, kroz nekoliko raznovrsnih primjera pokazat ćemo kako se *GeoGebra* može upotrijebiti za rješavanje matematičkih zadataka s posebnim osvrtom na numeričke metode rješavanja jednadžbi.

Konstrukcijski zadatak

Jedan od zadataka bio je odrediti rutu ljetnog plivačkog maratona (slika karte). Karta koju smo imali na raspolaganju poslužila je da se s *GeoGe-*

brom prezentiramo problem, a onda smo namjeravali pristupiti klasičnom trigonometrijskom izračunu. Ali čemu da se kao profesori zamaramo dobro znanim postupkom kada je tu *GeoGebra*. Konstruiramo trokut kojem je zadana jedna stranica i dva kuta na njoj. U sjecištu krakova dobivamo treći vrh i potom zadajemo naredbu `Udaljenost[A, C]`. Može nas iznenaditi realno prikazan izgled toga trokuta ali to je baš tako kada je jedna stranica trokuta šezdesetak puta veća od druge. Međutim i u takvom, na pogreške osjetljivom izračunu, *GeoGebra* daje točan rezultat.



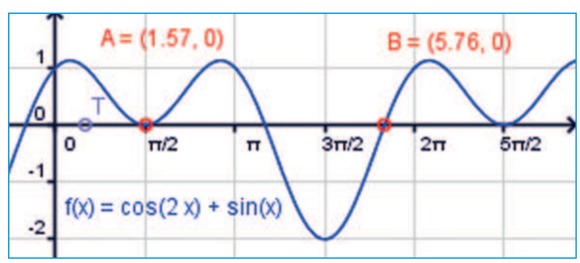
Algebarski alat

Vjerujem da ste i sami oslonili na *GeoGebru* u konstruktivnim geometrijskim zadacima. Isto tako *GeoGebra* je vrlo pouzdan alat za rješavanje algebarskih zadataka. Naravno, ona nema snagu jedne *Mathematice* ili specijaliziranih CAS alata ali u svojoj kategoriji odlično se nosi s rješavanjem algebarsko-analitičkih zadataka. Najčešće se pokazuje potreba za rješavanjem jednadžbi, odnosno određivanjem nultočaka funkcije, određivanjem sjecišta dvaju grafova i određivanjem ekstrema. U *GeoGebri* besprijekorno funkcioniraju sljedeće naredbe:

1. Nultočka[f]
2. Sjecište[$f1$, $f2$]
3. Ekstrem[f],

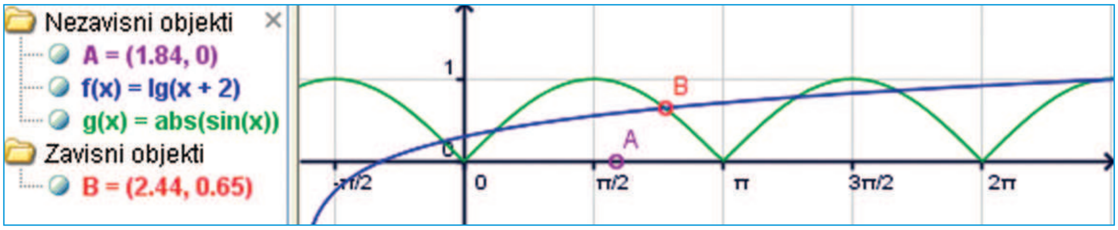
ali samo nad polinomima. Ukoliko je vaša funkcija racionalna, trigonometrijska ili s apsolutnom vrijednošću ništa se zadavanjem naredbe neće dogoditi. Međutim, na raspolaganju su proširene naredbe koje koriste Newtonovu metodu ili metodu *regula falsi* za određivanje nultočaka funkcije:

1. Nultočka[funkcija f, broj a] – daje nultočku funkcije f sa početnom vrijednošću a (Newtonova metoda)
2. Nultočka[funkcija f, broj a, broj b] – daje nultočku funkcije f na intervalu $[a, b]$ (*regula falsi*).



Na slici vidimo graf trigonometrijske funkcije $f(x)=\cos 2x+\sin x$. Točka A dobivena je naredbom: `Nultočka[f, x(T)]`, gdje je $x(T)$ apscisa pomične točke na osi x. Pomicanjem točke T, točka A "skakutat" će s jedne na drugu poziciju nultočke. I to ne nužno po redu zbog prirode Newtonove metode kojom ćemo se kasnije detaljnije pozabaviti. Točka B dobivena je metodom *regula falsi*, odnosno naredbom: `Nultočka[f, 3π/2, 2π]` i ona je kao takva statična.

I sjecište dvaju grafova moguće je dobiti Newtonovom metodom. Naredba je:



Sjecište[funkcija f, funkcija g, točka A],

gdje je A početna vrijednost na apscisi. Pomicanjem točke A dobivat ćemo nova sjecišta.

Geometrijska simulacija s dinamičnim izračunom

Na već spomenutom seminaru u Crikvenici svaka je grupa dobila i po jedan dodatni, "neterenski" zadatak. Evo jednog takvog:

Od kružnog kartona polumjera 7.6 cm trebala izradi stožastu čašicu najvećeg mogućeg obujma.

Zadatak spada u primjenu diferencijalnog računa. Uzmemo li da je polumjer kartona zapravo izvodnica s stošca i da su izvodnica, polumjer baze i visina stošca povezani formulom

$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

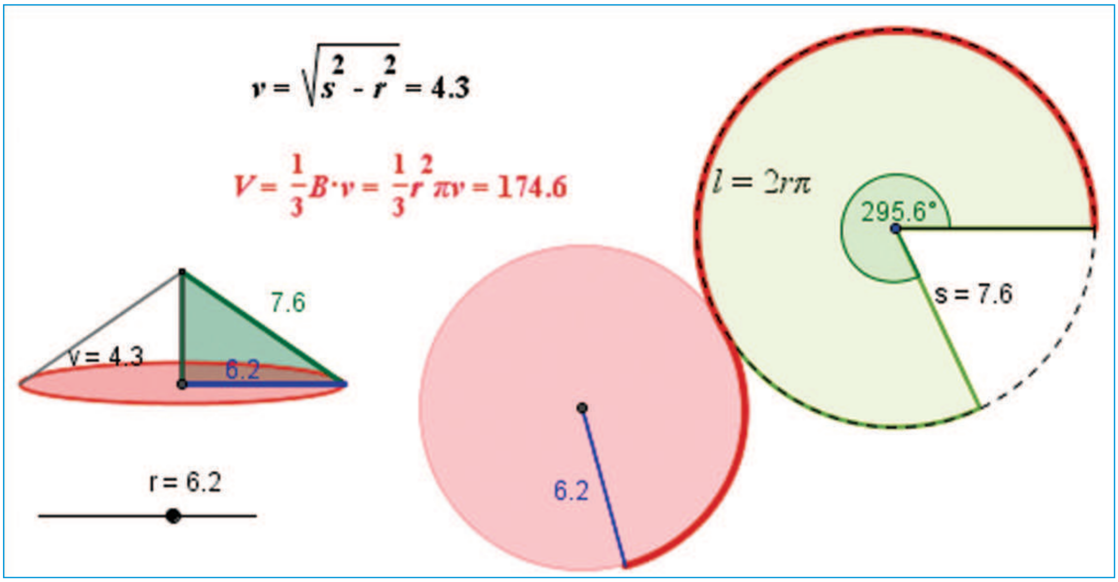
onda obujam stošca možemo izraziti kao funkciju polumjera:

$$V(r) = \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}.$$

Derivacijom te funkcije doći ćemo do stacionarnih točaka i maksimuma funkcije i bez uporabe računala, ali ovdje je jako zgodno prikazati virtualnu simulaciju u geometrijskom prozoru *GeoGebre*. Ako tome dodamo dinamični tekst, odnosno izračun:

"V = "+ 1/3 r^2 * pi * sqrt(s^2 - r^2),

A potom mijenjamo vrijednost polumjera r preko klizača lako ćemo se približiti rješenju. Još se može u koordinatnom sustavu preko traga ili lokusa točke (r, V) nacrtati sam graf funkcije $V(r)$.

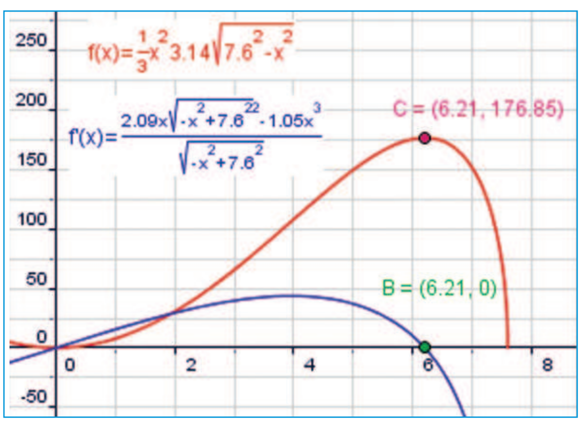


Određivanje ekstrema

Ono što nas ovdje više zanima jest zatražiti od *GeoGebre* da nam izračuna maksimum funkcije $V(r)$ prikazane grafom bez pomicanja klizača r. U polje za unos valja upisati formulu za obujam zamijenivši varijablu r s varijablom x, odnosno:

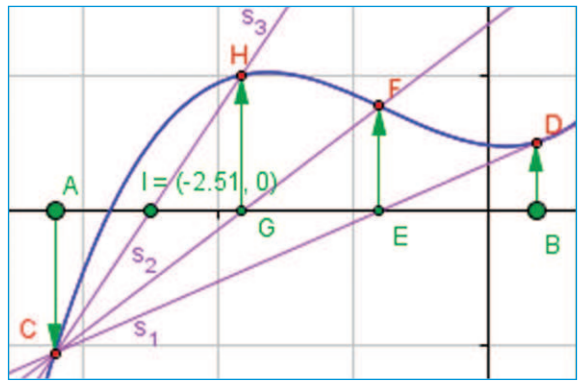
$$f(x) = 1/3\ x^2\ \pi\ \mathrm{sqrt}(s^2 - x^2).$$

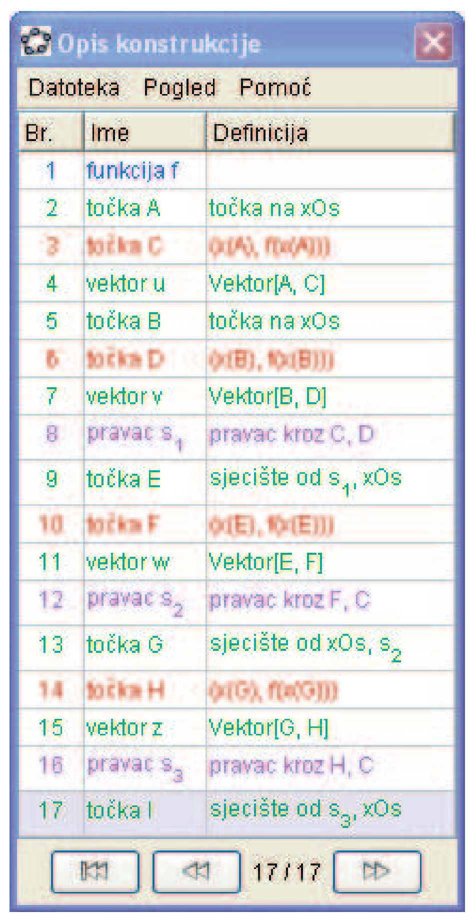
Kako funkcija nije polinom do ekstrema nećemo doći izravnom naredbom, već preko derivacije. Da bismo dobili derivaciju upišimo naredbu Derivacija[f] ili jednostavno $f'(x)$. Odabirom alata za upis teksta, klikom na crtaću plohu i upisom izraza "$f\ '(x)$ = " + $f'(x)$, te uključenjem LaTeX formule možemo dobiti zapis kakav je na priloženoj slici. Nultočku prve derivacije dobije se naredbom B = Nultočka [$f'(x)$, 6], gdje je broj 6 početna vrijednost za Newtonovu metodu. Ekstrem funkcije f je jednostavno $(x(B),\ f(x(B)))$.



Demonstracija numeričkih metoda

Numeričke metode određivanja nultočke funkcije, iako često jednostavne po ideji, mogu izgledati nepristupačne zbog silnih uzastopnih izračunavanja. Uz to lako se potkrade greška, a i cijeli postupak može biti uzaludan ukoliko se izabere nepovoljna početna vrijednost. Vjerujem da mnogi koji su te metode učili teoretski zapravo ih praktično nisu koristili. To je sada šansa za računala. Izravno programiranje ili programi poput *Excela* mogu nam tu itekako pomoći. No, s ničim tako jednostavno, a toliko zorno neće ispasti kao u programima dinamične geometrije. Na slici vidimo **metodu sekante**. Kako je to izvedeno vidi se iz priložene tablice koju je *GeoGebra* automatski producirala (Izbornik *Pogled* > *Opis konstrukcije*).





Opis konstrukcije

Datoteka Pogled Pomoć

Br.	Ime	Definicija
1	funkcija f	
2	točka A	točka na xOs
3	točka C	(x(A), f(x(A)))
4	vektor u	Vektor[A, C]
5	točka B	točka na xOs
6	točka D	(x(B), f(x(B)))
7	vektor v	Vektor[B, D]
8	pravac s_1	pravac kroz C, D
9	točka E	sjecište od s_1, xOs
10	točka F	(x(E), f(x(E)))
11	vektor w	Vektor[E, F]
12	pravac s_2	pravac kroz F, C
13	točka G	sjecište od xOs, s_2
14	točka H	(x(G), f(x(G)))
15	vektor z	Vektor[G, H]
16	pravac s_3	pravac kroz H, C
17	točka I	sjecište od s_3, xOs

17 / 17

Sve odjednom u po volji mnogo koraka

Konstrukcija kakvu smo izveli u prethodnom zadatku je jednostavna jer se ide korak po korak. Programi dinamične geometrije mogu izvesti proizvoljan broj koraka odjednom. U *GeoGebri* se za to koristi naredba:

Niz[izraz, varijabla, od, do].

Uporabom te naredbe konstruirat ćemo Newtonovu metodu. Krenimo od neke funkcije f, zadajmo parametar n kao klizač u granicama od 1 do 20 s korakom povećanja 1. Nacrtajmo neku točku A na apscisi i odredimo broj $x_1 = x(A)$. Metoda se zasniva na ideji da se u točki $(x_0, f(x_0))$ povuče tangenta i u točki x_1 u kojoj ona siječe apscisu nova je aproksimacija, odnosno nastavlja se postupak povlačenja tangente u točki $(x_1, f(x_1))$. Jednadžba tangente u točki $(x_n, f(x_n))$ glasi:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Stavimo li da je $y = 0$ dobivamo novu aproksimaciju:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tu formulu uključit ćemo u naredbu IteracijskaLista koja daje niz iterativnih funkcijskih vrijednosti, odnosno niz svih aproksimacija do broja n:

NA = IteracijskaLista[x – f(x) / f'(x), x_0, n].

Za prikaz tih aproksimacija kao točaka na apscisi potrebno je zadati ugniježđenu naredbu:

TnA = Niz[(Element[NA, k], 0), k, 1, Duljina[NA]].

Tumačenje:

- Element[NA, k] – daje k-ti element liste NA
- Duljina[NA] – broj elemenata liste NA, koji je ovdje gornja granica naredbe Niz;
- (Element[NA, k], 0) – crta točke.

Da bi nacrtali niz točaka na grafu najprije odredimo skup vrijednosti:

SV = Niz[f(Element[NA, k]), k, 1, n + 1].

Točke na grafu dobit ćemo naredbom:

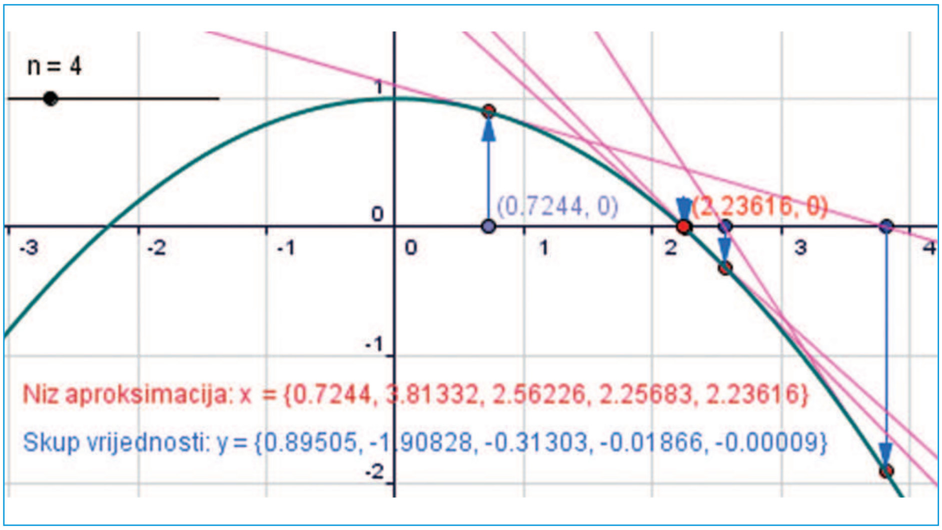
TnG = Niz[(Element[NA, k], Element[SV, k]), k, 1, n + 1],

a tangente:

Ta = Niz[Tangenta[Element[TnG, k], f], k, 1, n].

Dinamični tekstualni ispis niza aproksimacija dobije se naredbom:

"Niz aproksimacija: x_i = " + NA.



Točnost preko granica prikaza

GeoGebra prikazuje rezultate s točnošću na petu decimalu. Pojavi li se primjerice na nekom mjestu u nizu SV (skup vrijednosti) iz prethodnog primjera 0 opravdano je postaviti pitanje je li doista riječ o nuli. Na jedan okolišan način to možemo saznati, odnosno privoljeti *GeoGebru* na veću preciznost u prikazu. Program "zna" je li mu ono što je prikazano kao 0 to i stvarno, pa je dovoljno zadati niz uvjetnom naredbom:

$$\text{Provjera} = \text{Niz}[\text{Ako}[100000\ \text{Element}[\text{SV}, i] == 0, 0, i], i, 1, n + 1]$$

Ovdje program uspoređuje redom članove niza SV uvećane 100 000 puta s nulom. Ukoliko se razlikuju piše redni broj elementa, a ako je jednak daje 0. Na taj način ćemo dobiti jednostavan niz brojeva, na primjer:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 0, 0, 0\}.$$

To nam govori da se prva vrijednost manja od 10^{-10} u skupu vrijednosti SV nalazi tek na sedmom mjestu dok je u samom skupu SV bila prikazana i ranije. Točnu poziciju ovako definirane prve nule u dinamičnom okružju možemo odrediti naredbom:

$$\text{pn} = \text{Maksimum}[\text{Provjera}] + 1.$$

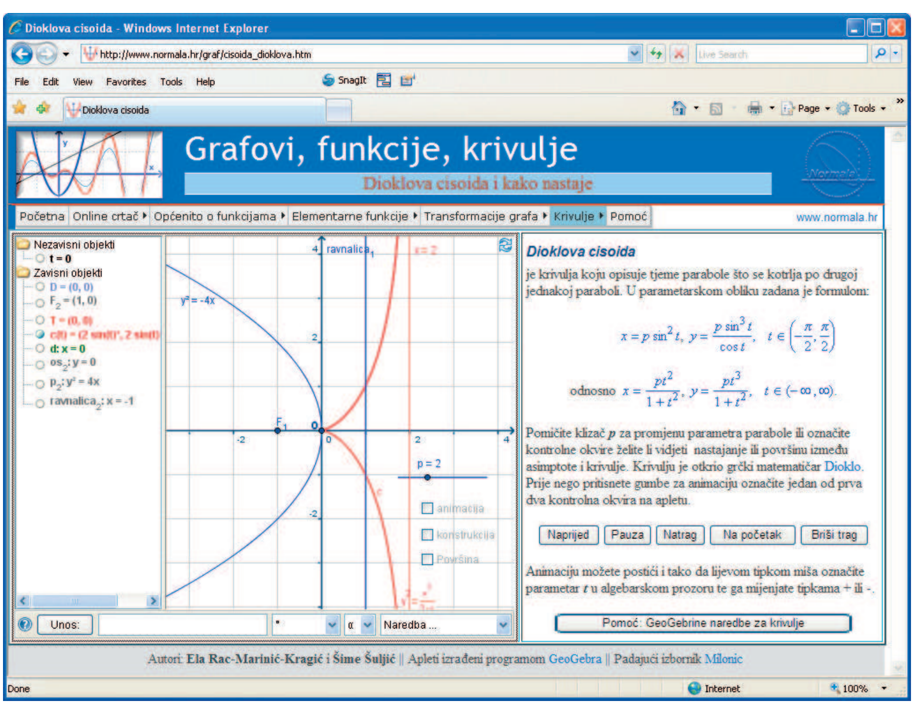
Na kraju je moguće dobiti i vrijednost te nove aproksimacije s točnošću na deset decimalnih mjesta kroz naredbu za dinamični tekst:

+ pn + ". aproksimacija je " + Element[NA, pn]*100000 + "/100000".

GeoGebra se pokazuje kao vrlo precizan i pouzdan alat u rješavanju jednadžbi i drugih matematičkih zadataka ali će pritom zahtijevati malo matematičke mašte i kritičke provjere onoga što dobijemo. A nije li upravo to ono što se od nas očekuje pri uporabi strojeva?!

Nekoliko linkova za dugo toplo ljeto

1. Za bolje razumijevanje numeričkih metoda toplo vam preporučujem *Numeričke metode i praktikum* Aleksandra Maksimovića s Instituta Ruđera Boškovića: `www.irb.hr/users/maks/numericke.html`. U prezentacijskom pdf formatu opisani su i primjeri kobnih pogrešaka u izračunima.



2. Dragoslav i Đorđe Herceg (Sveučilište u Novom Sadu): *GeoGebra Tools for Numerical Mathematics* – `www.im.ns.ac.yu/personal/hercegd/CADGME2007`.
3. Na interaktivnom online laboratoriju *Grafovi, funkcije i krivulje* `http://graf.normala.hr` uskoro će se naći *GeoGebrine* datoteke opisane u ovom članku.
4. Judith Preiner i Markus Hohenwarter: *Uvod u GeoGebru*, `http://www.geogebra.org/book/intro-en`.