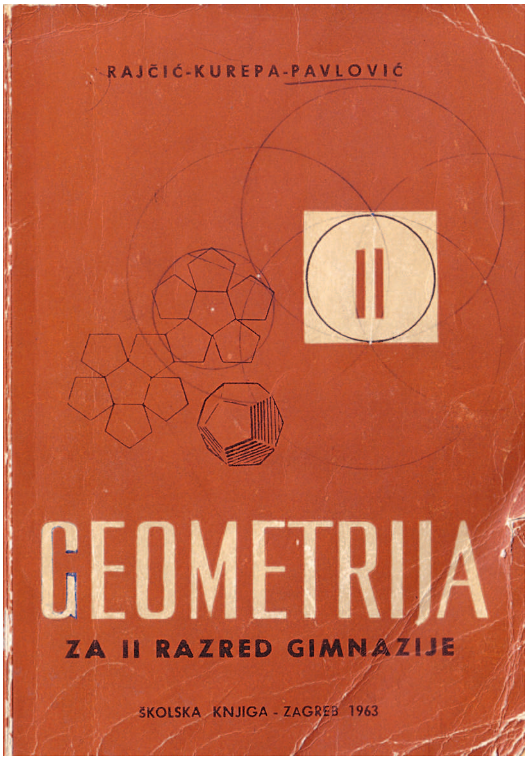
Iz stari(ji)h udžbenika



U prošlom, 45. broju MiŠ-a objavili smo članak Damjana Jovičića i Jelene Beban-Brkić u kojem je navedeno više dokaza Heronove formule, formule kojom se računa površina trokuta kad su mu poznate duljine svih stranica. U udžbeniku Geometrija za II. razred gimnazije čiji su autori Lav Rajčić, Đuro Kurepa i Branko Pavlović, a 1960. godine izdala ga Školska knjiga, Heronova je formula izvedena na još jedan način.

U odjeljku s naslovom Primjena sličnosti na kosokutan trokut najprije se uz primjenu *Poučka o obodnom i središnjem kutu* izvede relacija

$$r = \frac{bc}{2v_a}$$

te nakon toga formula za površinu trokuta

$$P = \frac{abc}{4r},$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta a r duljina polumjera trokutu opisane kružnice.

Slijedi određivanje polumjera upisane i pripisanih kružnica trokutu. Evo vjerno prenesenog ovog dijela knjige (stranice 32. – 35.).

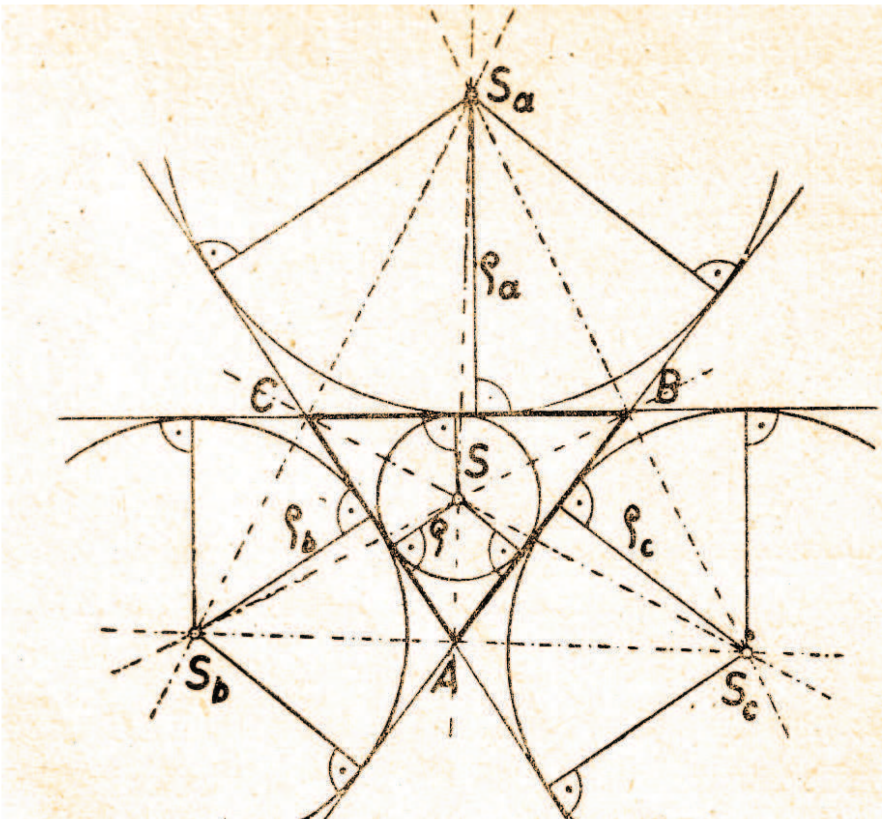
Polumjeri upisane i pripisanih kružnica

Nacrtajmo tri pravca koji ne prolaze jednom te istom točkom. Ti pravci određuju trokut ABC.

Konstruirajmo simetrale nutarnjih i vanjskih kutova trokuta ABC. Po tri od tih simetrala prolaze jednom točkom (zašto?), označimo te točke sa S, S_a, S_b i S_c kako je to učinjeno na slici 1.

Točka S središte je upisane kružnice polumjera ρ u trokutu ABC.

Za kružnice sa središtem u točki S_a, ili u S_b, ili u S_c i polumjerima ρ_a, ρ_b i ρ_c koje dodiruju i produženja



Slika 1.

stranica a, b ili c, kaže se da su pripisane trokutu ABC (slika). Površinu trokuta ABC možemo s obzirom na polumjere ρ, ρ_a, ρ_b i ρ_c izraziti na četiri različita načina:

$$P = P_{\Delta ABS} + P_{\Delta BCS} + P_{\Delta CAS} = \frac{1}{2}(a\rho + b\rho + c\rho) = \frac{a+b+c}{2} \cdot \rho\,,$$

$$P = P_{\Delta ABS_a} + P_{\Delta ACS_a} - P_{\Delta BCS_a} = \frac{1}{2}(c\rho_a + b\rho_a - a\rho_a) = \frac{b+c-a}{2} \cdot \rho_a\,,$$

$$P = P_{\Delta BCS_b} + P_{\Delta ABS_b} - P_{\Delta ACS_b} = \frac{1}{2}(a\rho_b + c\rho_b - b\rho_b) = \frac{a+c-b}{2} \cdot \rho_b\,,$$

$$P = P_{\Delta BCS_c} + P_{\Delta ACS_c} - P_{\Delta ABS_c} = \frac{1}{2}(a\rho_c + c\rho_c - b\rho_c) = \frac{a+b-c}{2} \cdot \rho_c\,.$$

Običaj je da se opseg trokuta bilježi s $2s$, dakle $a + b + c = 2s$, a otuda je

$$b + c - a = 2(s - a),$$

$$a + c - b = 2(s - b),$$

$$a + b - c = 2(s - c).$$

Zamijenimo li te vrijednosti za nađene vrijednosti za površinu trokuta, imamo

$$P = s \cdot \rho = (s - a) \cdot \rho_a = (s - b) \cdot \rho_b = (s - c) \cdot \rho_c,$$

ili

$$\rho = \frac{P}{s}\,,\quad \rho_a = \frac{P}{s-a}\,,$$

$$\rho_b = \frac{P}{s-b}\,,\quad \rho_c = \frac{P}{s-c}\,.$$

Heronova formula

Stari grčki matematičar i fizičar Heron Aleksandrijski (oko 120. g. pr. K.) našao je formulu po kojoj se može izračunati površina trokuta kojemu su poznate sve tri stranice.

Zadatak 1.

Izračunaj površinu trokuta ABC kojemu su zadane stranice a, b i c.

Rješenje:

Nacrtaj trokut ABC, upiši u taj trokut kružnicu sa središtem S i polumjerom ρ, zatim mu pripiši kružnicu sa središtem S_a i polumjerom ρ_a (slika 2.) Upisana kružnica u trokutu ABC neka dira stranice a, b i c u točkama D, E i F, pripisana kružnica stranicu a u točki G, a produženje stranica b i c u točkama H i K.

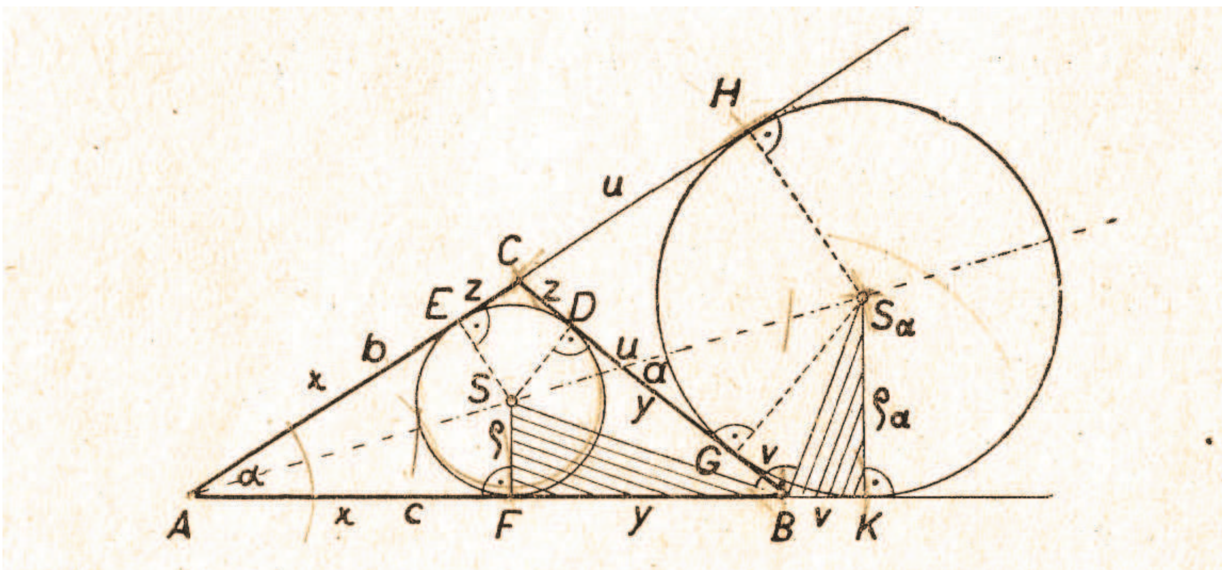
Dokaži prema slici 2. da je

$$AE = AF,\ BD = BF,\ CD = CE,$$

$$BG = BK,\ CG = CH \ \text{ i } \ AH = AK$$

(pomoću sukladnih pravokutnih trokuta).

Na slici 2. vidimo da je $CE + BF = CD + BD = a$.



Slika 2.

Zato je $AE + AF + (CE + BF) = 2AE + a = b + c$, otuda $2AE = b + c - a = 2(s - a)$ ili $AE = s - a$. Na isti način dobivamo da je $BD = s - b$, $CE = s - c$.

Nadalje, na slici 2. vidimo da je $BD + CD = BK + CH = a$, dakle $AK + AH = a + b + c = 2s$, ali $AK = AH$, pa je $AK = AH = s$. Prema tome je

$$BK = s - c.$$

Pogledajmo pravokutne trokute SFB i BKS_a; njihove su stranice uzajamno okomite, dakle ti su trokuti slični. Zato možemo pisati razmjer

$$\rho : BF = BK : \rho a,$$
$$(BF = BD = s - bc\rho c,\ BK = s - c)$$

pa izlazi

$$\rho : (s - b) = (s - c) : \rho_a,$$

otuda

$$\rho\ \rho_a = (s - b)(s - c). \qquad (1)$$

Ranije smo imali da je $P = s \cdot \rho = (s - a)\ \rho a$. Otuda

$$P2 = \rho \cdot \rho a \cdot s \cdot (s - a). \qquad (2)$$

Zamijenimo li (1) u (2), dobivamo

$$P^2 = s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)$$

ili

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}\ .$$

To je *Heronova formula* po kojoj se računa površina trokuta kojemu su zadane sve tri stranice.

Napomena. Trokutu kojemu su zadane sve tri stranice mogu se izračunati sve visine prema formulama

$$v_a = 2\frac{P}{a},\quad v_b = 2\frac{P}{b},\quad v_c = 2\frac{P}{c},$$

jer površinu P možemo izračunati pomoću Heronove formule.

I na kraju još samo dodajmo: iz ovog udžbenika možete naučiti poopćeni Pitagorin poučak (zapravo poučak o kosinusima), poučke o potenciji točke s obzirom na kružnicu, Eulerov teorem za poligonske mreže i pravilne poliedra, poučke o trobridu i poopćenja na n–terobrid, zatim kako doći do formula za obujam kugle i njezinih dijelova itd.