Primjer[1]

Branimir Dakić, Zagreb

Razvijati logičko i matematičko mišljenje. Razvijati sposobnost apstraktnog mišljenja. Razvijati sistematičnost, kritičnost, kreativnost učenika. Njegovati pozitivne navike kao što su upornost, radišnost, urednost, točnost.

Navođenje ovakvih ciljeva učenja matematike donedavno je bio obvezan pedagoški dekor kojim su se urešavali planovi i programi ili pak pismene priprave nastavnika.

Više se pritom mislilo naznačiti smisao i svrhu nastave i učenja matematike u školi kao i mjestu matematike u sustavu obrazovanja, nego li kako te vrlo složene i zahtjevne ciljeve provesti u djelo i konkretno ostvariti. Školski je sustav u drugoj polovini 20. stoljeća tek djelomice pratio i uvažavao društvene promjene i promjene u svijetu znanosti. Uglavnom je slijedio tradiciju, nastavljajući se na tzv. *austrougarsku školu*. A to je, pojednostavljeno i općenito, značilo: *Organizirati i razvijati kvalitetno i široko opće obrazovanje, kako bi se dobila što kompletnija i sposobnija (kompetentnija) intelektualna elita koja bi, zbog svestranosti i dobrih temelja, imala šire poglede na svijet te bi se lako prilagođavala i najzahtjevnijim svakovrsnim poslovima.*

Takav pristup bio je, a bio bi možda i danas, vrlo razuman i prihvatljiv da nije postupno *zaglavio*. I to iz čitavog niza razloga: pretrpanih nastavnih programa (čitati: sadržaja učenja), nekritičke i nerealne *ravnopravnosti* nastavnih predmeta, ignoriranja posebnih interesa i sklonosti učenika, zanemarivanja tehničkih i tehnoloških otkrića, zastarjelih metoda i oblika rada u nastavi itd. A kad je o našem školstvu riječ, valja spomenuti i stalno *materijalno* osiromašenje školstva s brojnim negativnim posljedicama.

Ciljevi obrazovanja u suvremenoj se školi definiraju izravnije. Oni jasno izražavaju zahtjeve da škola što prije i što učinkovitije *proizvede* osobu

1 Izlaganje održano na stručno-metodičkom skupu u Puli, 5. listopada 2007.

obrazovanu primjereno trenutačnim potrebama društvene zajednice, a to znači osobu koja je:

- snalažljiva u svakodnevnom životu,
- sposobna za nastavak obrazovanja,
- sposobna brzo se uključiti u radni proces,
- prilagodljiva promjenama na radnom mjestu,
- spremna na stalno samostalno učenje,
- *široko obrazovana u smislu pristupa rješavanju problema.*

Iščitavanje ovih ciljeva implicira svojevrstan zaokret u temeljnim postavkama provedbe nastave matematike: *Učenje matematike treba podrediti stvarnim potrebama suvremenog života.* Ono treba biti čim pragmatičnije. Zbog toga matematiku treba učiti kroz rješavanje raznovrsnih, stvarnih i konkretnih problema te na temelju toga valja razvijati ideje i koncepte. Ne treba ulaziti u dubinu pojedinih matematičkih sadržaja, ne treba *teoretizirati*. Znanja se imaju stjecati i usvajati prirodno i spontano kroz aktivan suradnički rad učenika i nastavnika koristeći se pritom svim dostupnim resursima, prije svega internetom.

Ovakav pristup za matematičare možda i nije potpuno neprihvatljiv, ali oni su svjesni da njegova kriva provedba i tumačenje skriva u sebi ozbiljne prijetnje. Svakako je najozbiljnija od njih opasnost od vulgarizacije same matematike, od gubljenja njezinih glavnih obilježja pa i samog njezinog identiteta.

Nagle i nedovoljno promišljene promjene rijetko kad daju pozitivne rezultate. Sjetimo se samo *moderne matematike*, pokreta koji je poput velikog požara harao nastavom matematike u svijetu u 60-im godinama prošlog stoljeća i koji se naglo ugasio. No kako nekad, tako i danas najveća opasnost po matematiku prijeti od agresivnih i gorljivih zagovornika i promotora *novih ideja*, čija je kompetentnost uglavnom obrnuto proporcionalna njihovim sposobnostima i stručnosti.

O primjeru

U nastavi matematike primjeri imaju vrlo veliku i višestruku didaktičku ulogu kod svih uzrasta. Oni mogu poslužiti i za uvodnu motivaciju, mogu biti potkrjepa novoobrađenom nastavnom gradivu, pri vježbanju doprinose boljem razumijevanju i trajnijem usvajanju sadržaja učenja itd.

Primjer je u suvremenoj školi važan čimbenik nastave matematike, čak štoviše, pridaje mu se i veća pozornost nego ranije. U to nas može uvjeriti već površan uvid u, primjerice, američki ili kanadski udžbenik matematike. Uzgred, iz tih zemalja danas se šire najjači utjecaji na nastavu matematike u svijetu, a u njima je opisani trend i najjače izražen. U spomenutim udžbenicima dominiraju primjeri, ima ih na stotine, a kako bi se istakla njihova važnost, uredno su popisani na početnim stranicama knjiga. Većina tih primjera pojednostavljene su ili idealizirane stvarne situacije. No u tome ni nije problem, jer njihova prava matematička interpretacija često nije dostupna uzrastu učenika. Problem je u tome što se vrlo često radi o iskonstruiranim, izmišljenim, *nategnutim* pa i besmislenim primjerima. Ponekad je to posljedica činjenice da se baš svaki dio gradiva ne može potkrijepiti pravim primjerom primjene.

Konkretni primjeri ne smiju biti sami sebi svrhom i njihovo rješavanje ne može biti isključiv cilj učenja matematike. Primjerima treba jasno odrediti i ulogu, i pravu mjeru, i način prezentacije. Oni trebaju biti didaktički materijal koji pridonosi motivaciji, koji je u službi zora i koji umanjuje apstraktnost sadržaja s ciljem njegova boljeg razumijevanja. Dobar i uvjerljiv primjer potpora je učenju. On može, između ostalog, uvjeriti učenika da od učenja matematike ima i stvarne koristi.

Prije svega, primjeri moraju biti:

- suvisli i dojmljivi,
- konkretni,
- uvjerljivi i realni,
- primjereni uzrastu,
- zanimljivi i poticajni,
- raznovrsni.

Primjeri ne smiju izazivati neugodne asocijacije i ne smiju banalizirati matematička znanja.

Razradu svake pojedine od navedenih točaka (a moglo bi ih se dopuniti još kojom) držimo nepotrebnom jer vjerujemo da je savim razvidno o čemu se radi.

U nastavku članka bavit ćemo se samim primjerima, njihovim mjestom i ulogom u nastavi matematike. Navest ćemo pritom kao ilustraciju i zornu potporu čitav niz konkretnih primjera.

Motivacijska uloga primjera

Jedna od glavnih uloga zadavanja realnih i praktičnih problema jest motivacija – pobuđivanje učenika na aktivno sudjelovanje pri obradi novog gradiva. Primjer može imati jak **motivacijski učinak**. Kadgod je to moguće, neka uvod u obradu neke teme započne lijepim i konkretnim primjerom. Možda ćemo ga uspjeti i potpuno riješiti i time utrti put za poopćenje ili teorijsku obradu teme. Ako ne, ako je problem koji smo otvorili izrazito zanimljiv ali je suviše originalan, navest ćemo ga, detaljno objasniti a njegovo rješenje provesti nakon usvajanja novih znanja.

Ovako, iz prve ruke, možemo se prisjetiti nekih primjera: poznate *Gaussove dosjetke* čiji je učinak u zbrajanju nekih nizova vrlo dojmljiv. Dobar je i primjer s *nagradom izumitelju šahovske igre* pri uvodu u obradu potencija, a uz istu temu vrlo je zgodno prebrajanje predaka neke obitelji.

Vrlo je dobra zorna potkrjepa poopćenom pojmu kuta (uz već uobičajenu uru) primjer bacačice kladiva. Tu je i primjer skakačice uvis uz obradu kvadratne funkcije. U obje discipline Hrvatska ima atletičarke svjetskog formata pa su ti primjeri time i zanimljiviji.

U nastavku dodajmo još i nekoliko potpunije obrađenih primjera.

Primjer 1.

Cijena rabljenog automobila prije svega ovisi o godini proizvodnje. Svake se godine vrijednost automobila umanjuje za 25% u odnosu na prethodnu godinu.

Ako je nov automobil kupljen po cijeni od 15 000 eura, kolika mu je cijena nakon

1) 5 godina; 2) 3.5 godine; 3) 75 mjeseci?

Potrebno je izračunati pad vrijednosti automobila nakon svake godine, tijekom deset do petnaest godina, i ucrtati odgovarajuće točke u koordinatni sustav. Analiza grafa pokazuje neke osobine funkcije koju možemo zapisati u obliku $C(t) = C_0 \cdot (0.75)^t$ gdje je C_0 cijena novog automobila, a $C(t)$ njegova cijena nakon t godina.

U ovom trenutku može se prijeći na definiranje eksponencijalne funkcije uz napomenu kako ćemo se odgovorima na pitanja iz primjera vratiti kasnije.

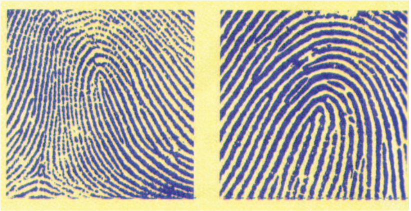
No kao uvod u istu temu može poslužiti i svojevrstan eksperiment koji učenici mogu provesti u obliku domaćeg zadatka. Pratit ćemo pad temperature vrućeg čaja u znatno hladnijoj okolini. Uzmimo čaj zagrijan na temperaturu od barem 70° C i izložimo ga vanjskoj temperaturi za koju bi bilo dobro da je ispod nule. Uronimo u čaj termometar i u vremenskim razmacima od 5 minuta bilježimo pad temperature čaja. Crtamo graf. Provodimo matematičku obradu ove pojave.

- Ovakva tema može biti predmet seminarskog pa čak i maturalnog rada, a može se izvesti i kao mali projekt uz sudjelovanje skupine učenika koja svestrano obrađuje pojavu.

Neki motivacijski primjeri mogu biti usmjereni na stvaranje intuitivne predodžbe o sadržaju koji će se netom obrađivati. Tako je na početku obrade *sukladnosti likova* zgodno navesti primjer s otiscima prstiju.

Primjer 2.

Daktiloskopija je grana biometrike koja se bavi proučavanjem otisaka prstiju. Otisci prstiju su jednoznačni i ne postoje dvije osobe, čak niti jednojajčani blizanci, koje imaju jednake otiske prstiju. Otisci prstiju vremenski su nepromjenjivi i potpuno neprikladni za krivotvorenje.



Uz ovaj primjer zanimljivo je spomenuti kako je tvorac metode ljudske identifikacije putem otisaka prstiju Ivan Vučetić, Hrvat rođen u Hvaru 1858. godine. Emigrirao je u Argentinu gdje je u policijskom uredu u La Plati bio ravnatelj odjela za statistiku.

Kako ustanoviti pripadaju li pronađeni otisci prstiju nekoj osobi ili ne pripadaju?

Jasno je da valja provesti usporedbu otisaka. I kroz takvu analizu razvija se intuitivni dojam sukladnosti.

Primjer 3.

Prigodom obilježavanja 300-te obljetnice pojave Descartesova djela *Discours de la méthode*, 1937. godine francuska pošta tiskala je prigodnu marku. Nakon što je marka puštena u promet, uočena je pogreška te je povučena i otisnuto je novo izdanje. Na slikama su dane obje, i prva i druga marka. Koja ima grešku?

Slično kao i u prethodnom primjeru, valja usporediti dvije sličice. Kako? Pa jedna je mogućnost provjeriti marke tako da se sličice poklope, a to je intuitivan povratak pravoj matematičkoj ideji o zasnivanju sukladnosti dvaju likova na temeljima izometrijskih transformacija.

Dobra je prigoda da se kaže nešto i o samom Descartesu, tim prije što je neposredno obrađeno gradivo bilo najuže povezano s metodom koordinata.

Primjer kao potkrjepa novom gradivu

Nakon uvoda ili neposredno nakon obrade novog gradiva obično želimo dati potkrjepu nekim probranim primjerima. Često su to formalni, možda tek nešto manje apstraktni zadaci, usko vezani uz temu. Ipak, ubacimo i neki konkretan pa makar i jednostavan i kratak primjer, kako bismo pridonijeli to boljem razumijevanju gradiva koje smo obrađivali.

No, primjer može biti jednostavan ali i vrlo sadržajan i time je njegova didaktička vrijednost veća. Evo jednog primjera uz kvadratnu jednadžbu.

Primjer 4.

Hrvatska je bogata raznim špiljama i jamama. Dubina jama kreće se i do više od 1 000 metara, a najdublja je *Lukina jama* na Sjevernom Velebitu.

Kako izmjeriti dubinu neke jame?

Zamislimo da se neka jama pruža okomito u zemlju i da je na njezinu dnu voda. Dubinu jame mogli bismo izmjeriti na ovaj način: Uzmemo kamen i pustimo ga da slobodno pada. Izmjerimo vrijeme od ispuštanja kamena do trenutka kad do nas dopre zvuk njegova udarca o površinu vode.

Pretpostavimo da je to vrijeme 10 sekunda.

Nakon ispuštanja kamen slobodno pada i vrijeme padanja je jednako $t_1 = \sqrt{\frac{2s}{g}} \approx 0.45\sqrt{s}$ sekunda.

Vrijeme potrebno da zvuk stigne od dna do vrha jame jednako je $t_2 = \frac{s}{340} \approx 0.003s$ sekunda.

Ukupno vrijeme je jednako $t = t_1 + t_2$, odnosno

$$\sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{340} = 10.$$

Uz prethodno prihvaćene približne vrijednosti imamo jednadžbu $0.45\sqrt{s} + 0.003s = 10$.

Prepoznajemo kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $\sqrt{s}$.

Naime, jednadžbu možemo zapisati u obliku iz kojega je to sasvim razvidno:

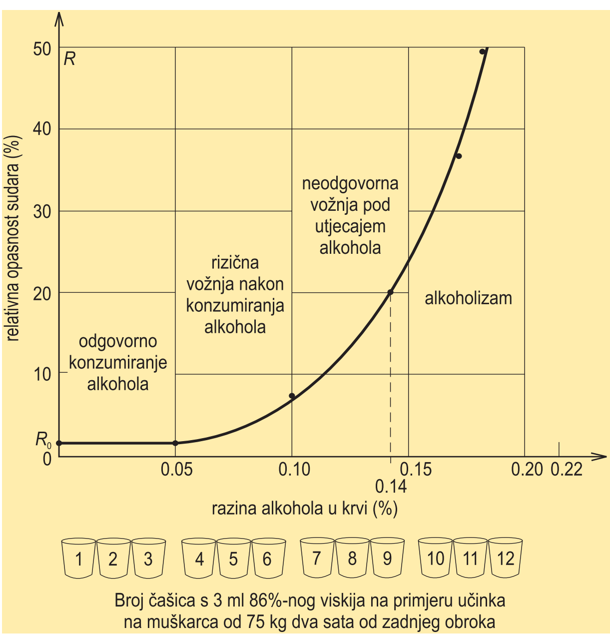
$$0.003\,(\sqrt{s})^2 + 0.45\,\sqrt{s} - 10 = 0.$$

Od dvaju rješenja ove jednadžbe prihvaćamo pozitivno, $\sqrt{s} = 19.6483$ pa je $s \approx 386$ metara.

Primjer 5.

Uz obradu eksponencijalne funkcije vrlo je poučan, zoran i ilustrativan primjer utjecaja količine alkohola ili neke droge u krvi vozača na sigurnost pri vožnji automobila.

Bilo bi dovoljno samo prikazati i komentirati sljedeći graf:



Graf prikazuje povećanje tzv. relativnog rizika od nesreće za vozača čija je masa oko 75 kg i to dva sata nakon uzimanja alkohola i nakon jela. Relativni rizik uspoređuje šanse za prometni incident vozača koji je konzumirao alkohol s onim koji nije.

Mala čašica nacrtana ispod apscisne osi pokazuje količinu alkohola koja je dovela do one koncentracije alkohola u krvi što je naznačena na osi x. Jedna čašica znači količinu koja odgovara 3 ml jakog pića.

Praktični problem pri uvježbavanju

Pri uvježbavanju novog gradiva razvijamo vještine i navike i to u pravilu provodimo rješavanjem nizova jednostavnijih i kraćih zadataka. No vježbe valja osvježiti i sadržajnijim, zanimljivijim primjerima koji sadrže neke zgodne životne situacije. Evo dvaju primjera uz obradu potencija.

Primjer 6.

Kineski je zid najimpresivnije djelo ljudskih ruku. Dugačak je 6 352 km, širok do 8 metara. Njegova je gradnja započeta u 5. st. prije Krista, a dovršena je negdje u 17. st. Kako bi se naglasila njegova veličina, često se navodi kako je zid jedina građevina na Zemlji vidljiva s Mjeseca. No je li to uistinu tako?

Usporedimo širinu zida s debljinom ljudske vlasi. Imamo sljedeće podatke: najveća širina zida je 8 m, debljina vlasi je $8 \cdot 10^{-5}$ m, a udaljenost Zemlje od Mjeseca iznosi $3.84 \cdot 10^8$ m.

Ako se zid širine 8 m vidi s udaljenosti $3.84 \cdot 10^8$ m, s koje se udaljenosti vidi vlas ljudske kose? Iz jednakosti:

$$8 : 3.84 \cdot 10^8 = 8 \cdot 10^{-5} : x,$$

izračunamo

$$x = 3.84 \cdot 10^3\ \text{m} = 3\ 840\ \text{m} = 3.84\ \text{km}.$$

Očito, nema govora o tome da se Kineski zid vidi s Mjeseca. To bi bilo isto kao vlas ljudske kose vidjeti s udaljenosti od oko 4 km.

Prethodni primjer ima još jednu poučnu svrhu, **razvijanje kritičnosti** pri analizi i rješavanju stvarnih problema. Takav je primjer s vidrom.

Vrlo je zanimljiv još jedan primjer koji je vezan uz praktično računanje s velikim brojevima.

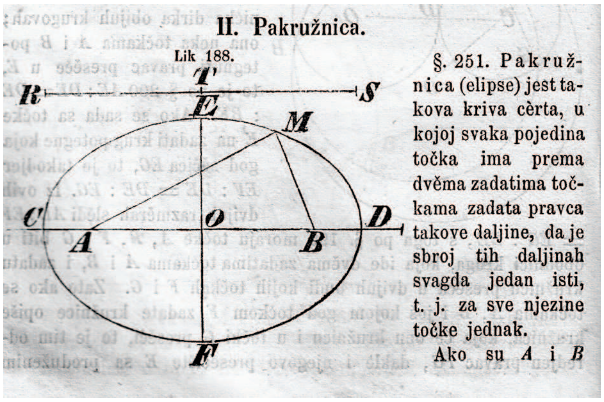
Primjer 7.

Od početka 1922. do kraja 1923. inflacija u Njemačkoj podigla je indeks cijena sa 100 na 10 000 000 000. To je dovelo do toga da su se malo vrijedne stvari plaćale ogromnim količinama novca. Na slici su lice i naličje jednog običnog pisma. Koliko je iznosila poštarina za ovo pismo ako su na prednjoj strani nalijepljene tri marke po dvije milijarde i četiri od po 500 milijuna, a na stražnjoj 50 maraka po 200 milijuna? Neka rezultat bude dan u znanstvenom zapisu.

Ovi posljednji primjeri imaju još jednu poučnu sastavnicu, razvijanje **kritičnosti** pri rješavanju praktičnih problema. Olako se prelazi preko rezultata dobivenih rješavanjem zadataka, bez osvrta i rasprave. A u nekim situacijama kritičnosti ne nedostaje niti u sadržajnom smislu. Tako će se primjerice olako parabolom zamijeniti lančanica, premda su to dvije posve različite i vrlo važne krivulje. No to je već nova tema.

Primjer 8.

Pri ponavljanju i vježbanju također je dobro navesti neki primjer iz povijesti. Tako je primjerice vrlo zgodan sljedeći isječak iz jednog starog udžbenika matematike. Riječ je o knjizi "*Pouka o měrstvu*" za više gimnazije i više realke iz 1867. godine koju je ponašio V. M. Golub.


II. Pakružnica.

Lik 188.

§. 251. Pakružnica (elipse) jest takova kriva cèrta, u kojoj svaka pojedina točka ima prema dvěma zadatima točkama zadata pravca takove daljine, da je sbroj tih daljinah svagda jedan isti, t. j. za sve njezine točke jednak.

Ako su A i B

Pri ponavljanju gradiva o elipsi učenici mogu analizirati definiciju elipse ili izvod njezine jednadžbe te je usporediti s onima koje smo mi izveli. Takva će analiza zasigurno pridonijeti trajnijem usvajanju ovog gradiva.

Kad smo već kod elipse, dobar je primjer i tlocrt pulske Arene. Naime, sve do nedavno uzimalo se da taj tlocrt ima oblik elipse, ali se to nije provjeravalo. Dipl. ing. Hrvoje Čuljak proveo je 2001. godine provjeru ove pretpostavke te je ona potvrđena.

Sljedeći primjer svojevrsna je mala zagonetka koja može malo podići raspoloženje u razredu, ali i potaknuti dosjetljivost učenika.

Primjer 9.

Na ulici stoji čovjek. Sunčeve zrake padaju prema Zemlji pod kutom od 66°30'. Sjena čovjeka duga je 1.1 metar. Kako se zove taj čovjek?

Iz danih podataka možemo izračunati visinu čovjeka: $v = 1.1 \cdot \mathrm{tg}\ 66.5^\circ \approx 2.53$ cm. Čovjek je očito daleko iznad prosječne visine. Uvid u Guinnessovu knjigu rekorda dat će nam odgovor. Dolazi iz Ukrajine i zove se Leonid Stadnjik, rođen 1971. godine i odnedavno je svjetski rekorder u visini. Na slici ga vidimo u društvu ukrajinskog predsjednika Viktora Juščenka.

Praktični problemi i provjera znanja

Provjere znanja sastavni su dio učenja i nastave matematike. Ciljevi su im višestruki, od poticanja na učenje pa do praćenja uspješnosti učenja. Provjere znanja trebaju biti usklađene sa sadržajima i načinom rada u nastavi i u svojoj zahtjevnosti niti smiju biti previše banalne, niti pretjerano originalne.

Kako u provjere znanja ugraditi zadatke s praktičnim i stvarnim problemima za koje smo rekli da u suvremenom učenju matematike u školi imaju vrlo značajno mjesto? Iskustvo govori kako su takvi zadaci često kritična točka pri samostalnom radu učenika. Postavljanje istih ili sasvim sličnih, već riješenih problema ne bi imalo smisla. A ako je pak postavljeni problem i složen ili potpuno nov, njegovo rješavanje prije svega zahtijeva puno vremena a i rezultati su neizvjesni. Odlučimo li ipak u provjeru znanja ugraditi neki zadatak u kojem valja provjeriti sposobnost primjene obrađenog gradiva na praktične i svakodnevne probleme, onda to valja svesti na što jednostavniji oblik: na čitanje s razumijevanjem nekog teksta, na provjeru snalaženja i tumačenja grafičkih zapisa ili zapisa u obliku neke formule i sl. Primijenjeni zadaci u provjerama znanja moraju biti jednostavni, jasni, nedvosmisleni i primjereni.

Rješavanje složenijih praktičnih problema može se provoditi putem seminarskih radova ili putem malih projekata. I takav oblik rada može se smatrati provjerom znanja i ocijeniti, što je možda i vrijednije od standardne provjere znanja.

LITERATURA

[1] Dakić, Elezović, Komplet udžbenika za gimnazije.

[2] Dakić, Elezović, Komplet udžbenika za tehničke škole.

[3] Z. Kurnik, Primjer, Matematika i škola 18 (2003.), 100-105.