Rješenja jedne zanimljive
logaritamsko eksponencijalne jednadžbe

Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb

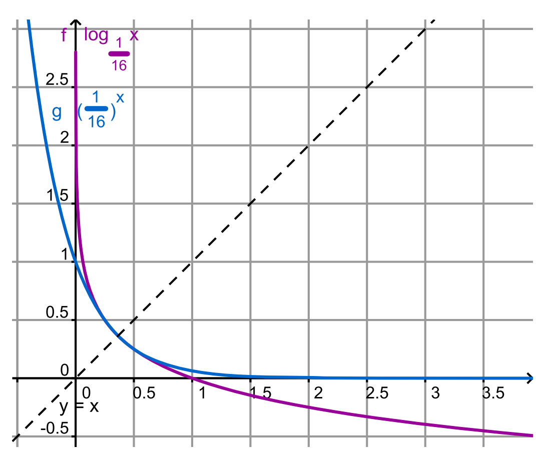
Koliko rješenja ima jednadžba

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x\,? \tag{1}$$

U prvi trenutak pomislit ćemo da ima samo jedno rješenje. Nacrtamo li u koordinatnom sustavu grafove $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ i $y = \log_{\frac{1}{16}} x$, učinit će nam se da se oni sijeku samo u jednoj točki. Nacrtamo li grafove uz pomoć računalnog programa *GeoGebra* možemo donijeti isti zaključak (vidi sliku 1): grafovi $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ i $= \log_{\frac{1}{16}} x$ sijeku se u jednoj točki koja se nalazi na pravcu $y = x$ jer su ove dvije funkcije međusobno inverzne.

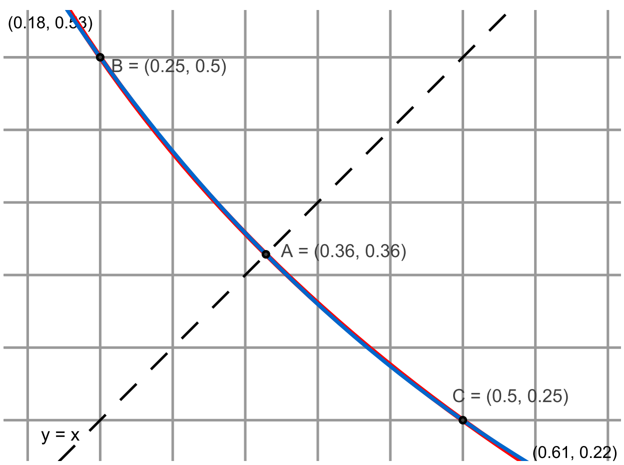
Neposrednom provjerom lako ćemo se uvjeriti da ova jednadžba ima još dva rješenja i to za

$$x = \frac{1}{4} \text{ i } x = \frac{1}{2}\,.$$



Slika 1.

Povećajmo prikaz 100 puta, odnosno 1 000 puta, i vizualno se uvjerimo u gornje zaključke (vidi slike 2 i 3 – u gornjem lijevom i donjem desnom uglu vide se koordinate rubova prikaza):



Slika 2.

Slika 3.

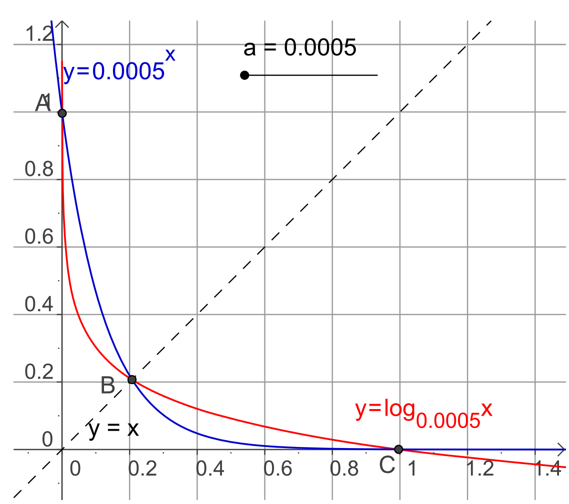
Grafovi su toliko *blizu* da se čini kako se stapaju u jednoj točki te nam je potrebno dodatno povećanje da se uvjerimo u odnose između grafova.

Ovaj zaključak navodi nas na sljedeće pitanje: koliko rješenja ima jednadžba

$$a^x = \log_a x \qquad (2)$$

za različite vrijednosti broja a, pri čemu je $a > 0$, $a \neq 1$?

Pokušajmo za početak otkriti rješenja koristeći se programom *GeoGebra*. Zadamo broj a kao klizač s korakom povećanja 10^{-5}, s vrijednostima od 10^{-5} do 5 i pokušajmo dobiti presjeke krivulja alatom za sjecište dvaju objekata. Pokazat će se da je ova metoda nedostatna jer za jako male iznose broja a čak i kada vizualno uočavamo tri točke presjeka, program ne može odrediti jednu od njih. Tako, primjerice, u jednadžbi (2) za $a = 0.00005$ dobit ćemo kao presjek točke C $(0.99609, 0.00052)$ i B $(0.20713, 0.20713)$, dok će točka presjeka najbliža osi y ostati 'nedefinirana'. Na ovaj je način ne možemo odrediti. Zato pokušajmo primijeniti Newtonovu metodu određivanja sjecišta krivulja – zadat ćemo naredbu `Sjecište[f,g, (0.00001,0.00009)]` kojom program određuje sjecišta od f i g s početnom vrijednošću u točki $(0.00001, 0.00009)$. Ovom metodom pronaći ćemo i treću točku presjeka A $(0.00052, 0.99609)$ (vidi sliku 4). Treba imati na umu da su vrijednosti koordinata točaka približne, a preciznost određujemo postavkama programa. U novoj inačici *GeoGebra* može prikazivati brojeve s točnošću na 15 decimala.



Slika 4.

Namjestimo klizač na najmanju postavljenu vrijednost 10^{-5}. Upišimo naredbe:

```
Sjecište[f,g,(0.00001,0.00009)]
Sjecište[f,g,(0.00009,0.00001)],
```

a točku presjeka koja pripada pravcu $y = x$ lako postižemo direktno, alatom za sjecište. Postupno povećavajmo vrijednosti broja a za 10^{-5}. Za $0 < a < 0.06599$ uočavamo tri točke presjeka. Kako dalje povećavamo a sve se točke stope u jednu. Za $a \geq 0.06599 \approx e^{-e}$ jedna je točka presjeka. Je li tada stvarno samo jedno sjecište ili se zbog pomaka točaka na nove koordinate izjalovila i Newtonova metoda traženja sjecišta? Jesu li i tu tri točke presjeka toliko blizu da im se koordinate razlikuju manje od 10^{-5} pa ih ne možemo razlikovati zbog ograničenja na 5 decimala?

Primijetit ćemo također da se za $a > 1$ u početku grafovi sijeku u dvije točke, a zatim za $a > 1.44467 \approx e^{\frac{1}{e}}$ nema točki presjeka.

Upotrebom programa *GeoGebre* došli smo do zaključaka koje nismo mogli donijeti samostalno, crtajući grafove logaritamske i eksponencijalne funkcije istih baza. Kako bismo u potpunosti bili sigurni u gornje zaključke, moramo ipak problem razmotriti matematički. Podijeliti ćemo problem na dva slučaja u odnosu na broj a:

$$0 < a < 1 \text{ i } a > 1.$$

1. $a > 1$

Radi se o rastućim funkcijama.

Napišimo jednadžbu (2) u ekvivalentnom obliku:

$$a^{a^x} = x . \qquad (3)$$

Lema: Ako je funkcija $f(x)$ rastuća, tada su jednadžbe $f(f(x)) = x$ i $f(x) = x$ ekvivalentne.

Dokaz: Neka je x_0 nultočka jednadžbe $f(x) = x$. Tada vrijedi $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$. Obratno, ako je $f(f(x_0)) = x_0$, a pritom $f(x_0) \neq x_0$. Ili je $x_0 < f(x_0)$ ili je $x_0 > f(x_0)$. Kako funkcija raste, tada u prvom slučaju vrijedi $f(x_0) < f(f(x_0)) = x_0$, a u drugom $f(x_0) > f(f(x_0)) = x_0$, što je kontradikcija.

Koristeći ovu lemu dolazimo do zaključka da je jednadžba (3) ekvivalentna sa

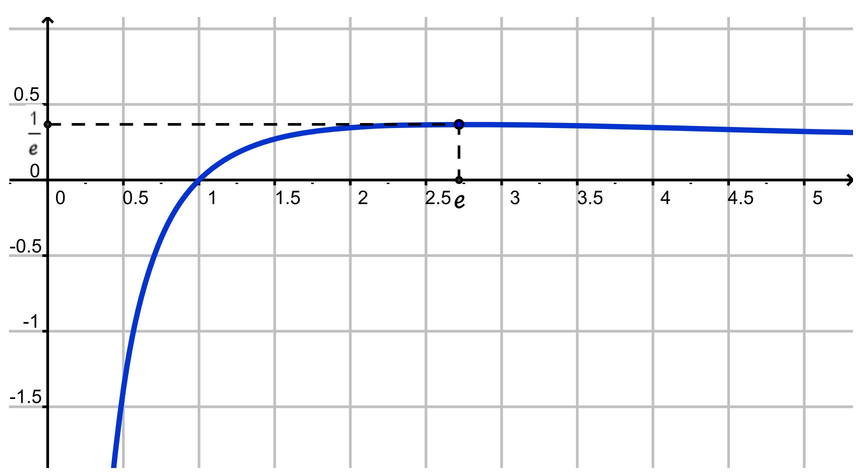
$$a^x = x . \qquad (4)$$

Kod traženja broja rješenja jednadžbe pomaže sljedeći poučak: *Ako je funkcija na nekom intervalu* $[a, b]$ *određena i neprekidna, te vrijedi* $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$, *tada ona ima nultočku koja pripada intervalu* $\langle a, b\rangle$. U stvari, ako funkcija raste ili pada na intervalu $[a, b]$ a na rubovima postiže vrijednosti suprotnog predznaka, ona će na intervalu $\langle a, b\rangle$ imati jedinstvenu nultočku!

Napišimo jednadžbu koja je ekvivalentna jednadžbi (4):

$$\ln a = \frac{\ln x}{x} \qquad (5)$$

Ispitajmo tijek funkcije $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ (vidi sliku 5).



Slika 5.

Funkcija h raste za $x < e$, pada za $x > e$, a u $x = e$ postiže maksimum koji iznosi $\frac{1}{e}$. Zato jednadžba (5) nema rješenja ako je ln $a > \frac{1}{e}$ (tj. $a > e^{\frac{1}{e}}$), i ima jedinstveno rješenje $x = e$ kod $a = e^{\frac{1}{e}}$. Dva rješenja imati će pri $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$.

2. $0 < a < 1$

Radi se o padajućim funkcijama. Jednadžba

$$a^x = x$$

ima jedinstveno rješenje x_0 koje je istovremeno i rješenje jednadžbe (2). Transformirajmo (2) u $a^x - \log_a x = 0$ i promatrajmo tok funkcije

$$f(x) = a^x - \log_a x.$$

Ispitujemo njenu derivaciju

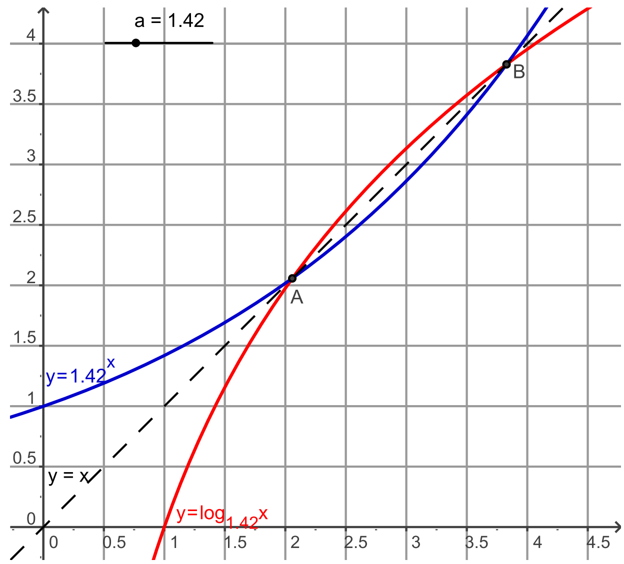
$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{x\, a^x \ln^2 a - 1}{x \ln a}$$

kojoj je nazivnik negativan za svaki $x = 0$ pa je predznak derivacije uvijek suprotan od predznaka njenog brojnika $\varphi(x) = x\, a^x \ln^2 a - 1$. Lako pokažemo da $\varphi(x)$ raste za $x < -\frac{1}{\ln a}$, pada za $x > -\frac{1}{\ln a}$, a za $x = -\frac{1}{\ln a}$ postiže maksimum φ_{max}. Rješavajući nejednadžbu $x\, a^x \ln^2 a - 1 \leq 0$, dobit ćemo $a \geq e^{-e}$. Dakle, za $e^{-e} < a < 1$ $\varphi(x) \leq 0$ i $f'(x) > 0$, funkcija $f(x)$ je rastuća i ima samo jednu nultočku. Ako je pak $0 < a < e^{-e}$, tada je $\varphi(x) > 0$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(1) < 0$. Znači da $\varphi(x)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ima dvije nultočke. $f(x)$ na tom intervalu prvo raste, zatim pada pa opet raste, a u nultočkama funkcije $\varphi(x)$ postiže minimum i maksimum koji su različiti od nule (dokažite). Dakle, u tom slučaju funkcija, $f(x)$ imat će tri nultočke na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

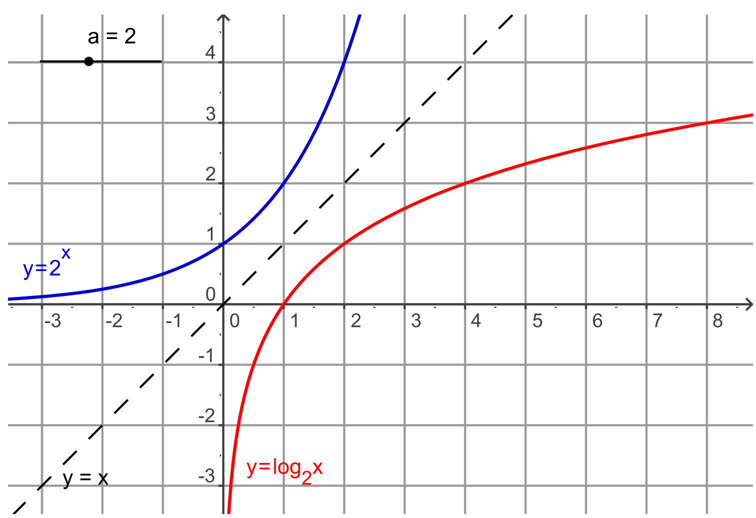
* * *

Nakon svega možemo donijeti zaključak: Jednadžba $a^x = \log_a x$ ima:

- za $0 < a < e^{-e}$ tri rješenja,
- za $e^{-e} < a < 1$ jedno rješenje,
- za $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ dva rješenja,
- za $a = e^{\frac{1}{e}}$ jedno rješenje $x = e$,
- za $a > e^{\frac{1}{e}}$ niti jedno rješenje.



Slika 6.



Slika 7.