Još jedan dokaz Eulerovog teorema

Šefket Arslanagić, Sarajevo

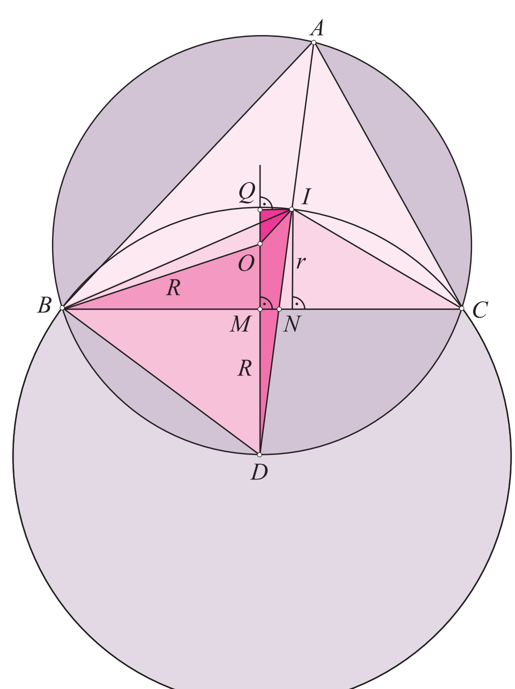
Riječ je o sljedećem teoremu:

Ako su točke O i I središta opisane i upisane kružnice trokuta ABC, tada vrijedi jednakost

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr. \qquad (1)$$

Ovaj teorem ima u geometriji značajnu ulogu i ima zanimljive posljedice. U [1] na stranicama 432.–434. dana su dva dokaza ovog teorema i to jedan čisto planimetrijski, a drugi pomoću analitičke geometrije. Ovdje ćemo sada dati još jedan čisto geometrijski dokaz za koji će nam biti potreban samo Pitagorin teorem. Evo tog dokaza:

Neka je točka M polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je točka Q ortogonalna projekcija točke I na pravac OD uz činjenicu da opisana kružnica oko trokuta BCI ima središta u točki D koja je središte luka $\widehat{BC}$.



Sada imamo na osnovi Pitagorinog teorema primijenjenog na pravokutne trokute MBD, MOB, IOD i IOQ:

$$
\begin{aligned}
|OB|^2 - |OI|^2 &= |OB|^2 - |DB|^2 + |DI|^2 - |OI|^2 \\
&\qquad \text{(jer je } |DB| = |DI|\text{)} \\
&= |OM|^2 + |BM|^2 - |BM|^2 + |DM|^2 + |DQ|^2 \\
&\qquad + |IQ|^2 - |OI|^2 \\
&= |OM|^2 - |DM|^2 + |DQ|^2 - |OI|^2 - |IQ|^2 \\
&= |OM|^2 - |DM|^2 + |DQ|^2 - |OQ|^2 \\
&= (|OM| + |DM|)(|OM| - |DM|) \\
&\qquad + (|DQ| - |OQ|)(|DQ| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| - |DM|) \\
&\qquad + |OD|(|DQ| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| - |DM| + |DQ| + |OQ|) \\
&= |OD|(|OM| + |OQ| - |DM| + |DM| + |MQ|) \\
&= |OD|(|MQ| + |MQ|) = R \cdot 2r = 2Rr
\end{aligned}
$$

jer je $|OD| = R$, te $|MQ| = |IN| = r$, gdje je točka N nožište normale iz središta upisane kružnice I na stranicu $\overline{BC}$.

Dobili smo da je $|OB|^2 - |OI|^2 = 2Rr$, a odavde zbog $|OB| = R$:

$$|OI|^2 = R^2 - 2Rr\,, \qquad \square$$

Posljedica: Budući da $|OI|^2 \geq 0$, iz (1) slijedi:

$$R^2 - 2Rr \geq 0, \quad \text{tj.} \quad R\,(R - 2r \geq 0),$$

a odavde

$$R \geq 2r.$$

Ova nejednakost se u matematičkoj literaturi naziva **Eulerova nejednakost** i ima važnu ulogu u području geometrijskih nejednakosti. O dokazima ove nejednakosti autor ovog članka je pisao u [2] na stranici 186. i u [3] na stranici 153. Recimo na kraju da je ovaj autor u [4], stranica 6. objavio članak o tri poboljšanja nejednakosti (1).

LITERATURA

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene,* Bosanska riječ, Sarajevo.

[2] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.

[3] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka,* Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.

[4] Š. Arslanagić, *Poboljšanje jedne poznate geometrijske nejednakosti u trouglu,* Tangenta, 53/1, godina 2008/09.

[5] O. Bottema i ostali, *Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing,* Groningen.

AFORIZMI

Čovjek koji zna prikriti svoje neznanje i nije potpuna neznalica.

Znanje koje se stječe bez velikog truda ne može biti veliko.

Znanje je lako izbjeći, neznanje teško.

Nakon završenih škola svi putovi vode u – zavod za zapošljavanje.

Baš kad je u najvećem poslu i kad mu je najpotrebnija, čovjek govori da ne zna gdje mu je glava!

Zdravko Kurnik