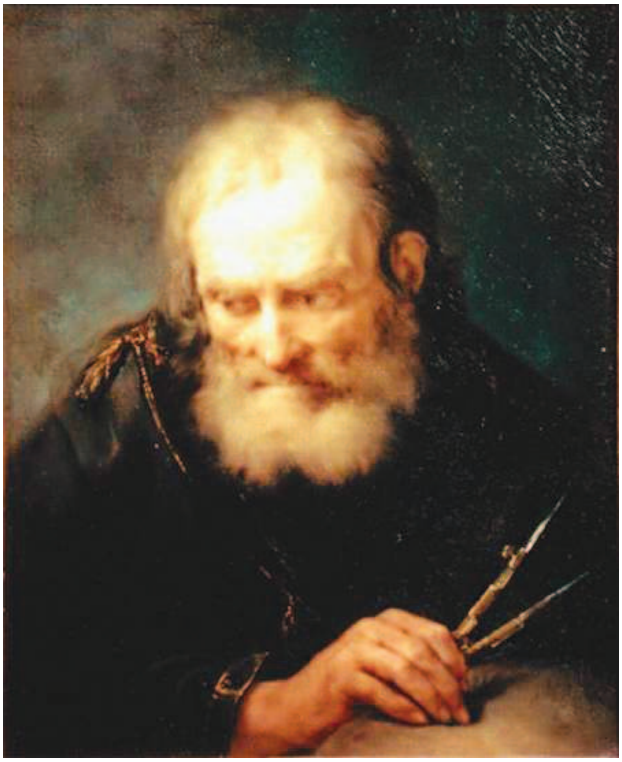
Kako je Arhimed
računao površinu odsječka parabole

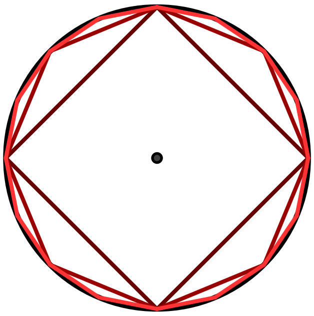
Ela Rac Marinić Kragić, Zagreb



Drevni Grci i problem izračunavanja površine

Neke od osnovnih problema matematičke analize geometrijskim su metodama obrađivali još stari Grci. Osim konstrukcija tangente na krivulju i određivanja težista, oni su se bavili izračunom duljine krivulje, površine lika omeđenog nekom ravninskom krivuljom i volumena geometrijskih tijela. Smatrali su da je površina zadanog lika određena ako mogu šestarom i trokutom konstruirati kvadrat ekvivalentne površine. Takvu metodu određivanja površine nazivamo *kvadraturom*. Kako kod pojedinih veličina nisu mogli dobiti točnu konstrukciju, služili su se aproksimacijama. Arhimed je izračunao površinu kruga služeći se upisanim i opisanim pravilnim mnogokutima. Izračunao je da se površine zadanom krugu opisanog i upisanog 96-erokuta razlikuju samo za 0.0002. Služeći se modernom terminologijom to bi značilo da je Arhimed odredio sljedeće granice broju π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$



Slika 1.

Arhimed i njegova dostignuća

Arhimed je jedan od najvećih matematičara svih vremena. Poznati su i njegovi radovi iz fizike i tehnike. Rođen je 287. godine prije nove ere u Sirakuzi na otoku Siciliji, tadašnjem grčkom nezavisnom gradu-državi.

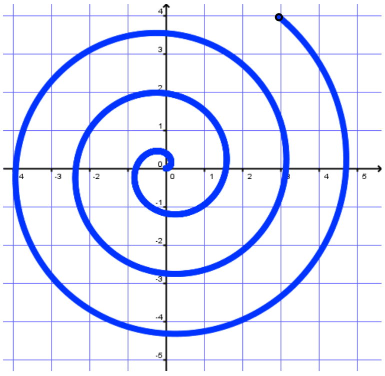
Slika 2.

Legenda kaže da je umro od ruke rimskog legionara za vrijeme Drugog punskog rata, 212. godine prije nove ere. Crtao je krugove u pijesku i uzviknuo vojniku "Noli turbare circulos meos". Njegov je grob pronašao Ciceron, i to zahvaljujući crtežu lopte i valjka koji se nalazio na nadgrobnom spomeniku. Malo se zna o njegovu životu. Otac mu je bio grčki astronom i matematičar Fidija. Arhimed je brzo usvojio sva očeva znanja te odlazi u Aleksandriju (današnji Egipat) gdje je upoznao i *Eratostena*. Kao genijalni fizičar otkrio je mnoge zakone: zakon poluge (legendarni je njegov uzvik – Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu, pa ću pomaknuti Zemlju), položio osnove hidrostatici, pronašao zakon uzgona (tzv. Arhimedov zakon – nakon spoznaje je gol istrčao iz gradskog kupatila vičući "Heureka"), odredio težište tijela, unaprijedio je statiku. Vrativši se u Sirakuzu, Arhimed se u početku bavio astronomijom. No uskoro pomaže obrani grada od rimskih napada, gradeći nove strojeve i oružja: vatreno zrcalo, arhimedova kandža, katapult, sustav kolotura za podizanje velikih tereta malom silom, vijak korišten za pumpanje vode iz brodova... U skladu s grčkom koncepcijom prirode koja je uređena prema matematičkim zakonima, Arhimed je tretirao i fizikalne probleme koristeći u njihovu rješavanju matematičke metode. No, on se služio i obratnim procesima – fizikalne činjenice koristio je u dokazivanju novih matematičkih teorema. Tu *mehaničku metodu* koristio je i u kvadraturi parabole.

Najveći su ipak njegovi doprinosi matematici. Pronašao je način za zapisivanje vrlo velikih brojeva. Smislio je taj sustav računanja s velikim brojevima rješavajući *problem prebrajanja pješčanih zrnaca*. Sustav brojeva je pozicijski i bazira se na broju 10^4 – grčki μυριας (*murias*). Zaključio je da bi broj zrnaca koji bi ispunio svemir iznosio 10^{63}. Također je pronašao i zakon množenja potencija $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$. Izračunao je obujam kugle i dokazao da se obujmi valjka, kugle i stošca jednakih polumjera i visina odnose u omjeru $3 : 2 : 1$. Arhimeda smatramo ocem infinitezimalnog računa.

Mjereći površinu kružnice, daje aproksimacije broja π i $\sqrt{3}$.

Mnogi zakoni, strojevi, matematičke veličine nose njegovo ime: Arhimedov aksiom, Arhimedova tijela, Arhimedove kružnice, Arhimedova spirala (jednadžba u polarnim koordinatama $\rho = a\varphi$, vidi sliku 3.), Arhimedov broj, Arhimedov paradoks, Arhimedov vijak. O Arhimedovu palimpsestu pročitajte u MiŠ-u broj 46.



Slika 3.

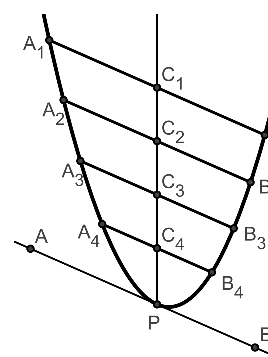
Metoda iscrpljivanja ili ekshaustije

Aksiome na kojima se temelji ova metoda dao je *Euklid* u svojim *Elementima*, a Platonov učenik *Eudoks* postavlja novu metodu. On je aproksimirao krug pravilnim mnogokutima upisanim i opisanim krugu. Eudoks daje egzaktan dokaz da je površina kruga razmjerna kvadratu njegova polumjera, dok je Arhimed dokazao isto za omjer opsega i promjera kruga i ustvrdio da je riječ o istom broju. U svojoj metodi Eudoks koristi poznati aksiom mjere: Za bilo koje dvije veličine a i b iste vrste, $a < b$, uvijek postoji višekratnik od a koji je veći od b, tj. $n \cdot a > b$. *Aristotel* je pokazao da uvijek možemo naći takav n za koji vrijedi $\frac{b}{2^n} < a$; drugim riječima, možemo raspolavljati zadanu veličinu proizvoljan broj puta kako bismo dobili po volji malu veličinu. Metoda iscrpljivanja izvodi se u dva koraka. Prvo se veličina A aproksimira drugom veličinom B kojom je lakše baratati (računati, konstruirati). Zatim se dokaže da ako ne vrijedi $A > B$ niti $A < B$, tada je $A = B$. Metoda iscrpljivanja ne izvodi se u beskonačnom nizu postupaka, ona se prekida nakon konačno mnogo koraka. Ostatak koji se može izračunati po volji malim Grci nisu smatrali zanemarivom veličinom, nego su je koristili u dokazu putem kontradikcije (*reductio ad absurdum*). Arhimed je, koristeći se *Demokritovim* dostignućima, razvio metodu ekshaustije riješivši s pomoću nje čitav niz problema koji se danas rješavaju integralnim računom. Koristio se ovom metodom prilikom izračunavanja površine kruga, odsječka parabole, elipse, za računanje površine sfere... Njegova metoda uvođenja međukoraka, pretpostavki i lema, a potom svođenja na kontradikciju bila je matematički stroga i ispravna, ali i nezgrapna za širu uporabu. Iz njegovih dokaza ne može se zaključiti kako rješavati klasu srodnih problema.

Arhimedova kvadratura parabole

Dvije tisuće godina prije otkrića infinitezimalnog računa Arhimed je koristio metodu iscrpljivanja i izračunao površinu odsječka parabole. Površinu je najprije izračunao koristeći teoreme iz mehanike, a zatim daje geometrijski dokaz, koji je ovdje opisan.

1. Koristi se sljedeće svojstvo parabole: Ako tangenta AB dira parabolu u točki P, a tetive A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... su paralelne tangenti, tada polovišta tih tetiva točke C_1, C_2, C_3,... leže na jednom pravcu koji je paralelan s osi parabole i prolazi točkom P (vidi sliku 4.).

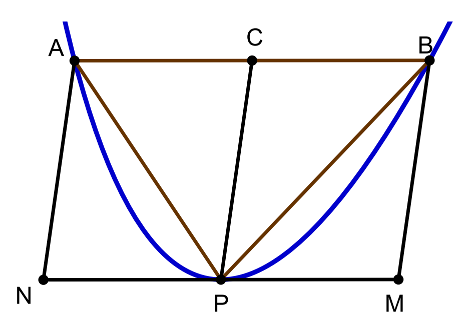


Slika 4.

Nadalje vrijedi:

$$\frac{|A_1C_1|^2}{|PC_1|} = \frac{|A_2C_2|^2}{|PC_2|} = \frac{|A_3C_3|^2}{|PC_3|} = \ldots \qquad (1)$$

2. Promatrajmo sada odsječak parabole omeđen lukom parabole $\overset{\frown}{APB}$ i tetivom $\overline{AB}$. Tetivu $\overline{AB}$ nazivamo osnovicom, a diralište P tangente zovemo vrhom. Točka C je polovište osnovice. Prema svojstvu (1) pravac PC paralelan je s osi parabole. U odsječak parabole upišimo trokut APB, a oko nje opišimo paralelogram $ABMN$ (slika 5.).



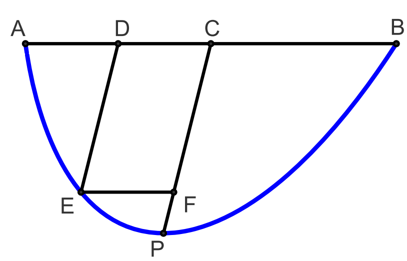
Slika 5.

Kako je površina trokuta jednaka polovini površine paralelograma ona je veća od polovine površine odsječka, a zbroj površina preostalih dvaju odsječaka iznad tetiva $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$ manji je od polovine površine cijelog odsječka. Ako dalje na isti način upišemo dva trokuta u preostale odsječke, zbroj njihovih površina bit će veći od polovine zbroja odsječaka kojima su upisani, a zbroj površina četiri odsječka koja preostanu nakon drugog upisivanja trokuta biti će manji od jedne četvrtine površine čitavog odsječka. Ako još jednom ponovimo upisivanje, preostat će osam još manjih odsječaka kojima će zbroj površina biti manji od jedne osmine čitavog odsječka, itd. Produžimo li postupak, u odsječak je moguće upisati takav mnogokut da površina koja preostane izvan mnogokuta bude po volji mala.

3. Raspolovimo dužinu $\overline{AC}$ točkom C i povucimo njome paralelu $\overline{DE}$ sa $\overline{CP}$ (slika 6.). Neka je zatim $\overline{EF}$ paralelno s $\overline{AB}$. Dokažimo da vrijedi:

$$|PC| = \frac{4}{3}\,|ED|. \tag{2}$$

Prema (1) $\dfrac{|AC|^2}{|PC|} = \dfrac{|EF|^2}{|PF|}$. Kako je $|AC| = 2|EF|$, tada je $|PC| = 4|PF|$, $|FC| = |ED| = 3|PF|$ iz čega izlazi (2).

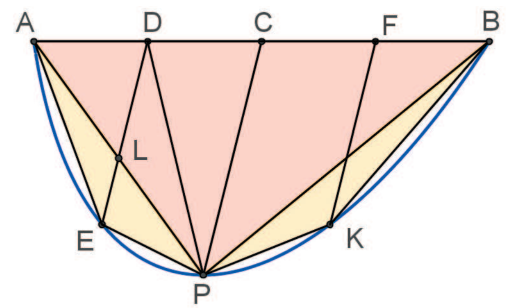


Slika 6.

4. Promatrajmo trokute AEP i PKB (slika 7.). Površina trokuta APB je osam puta veća od površine svakog od njih. Pravac ED raspolavlja tetivu $\overline{AP}$ u točki L jer je paralelan s $\overline{CP}$, a također raspolavlja i $\overline{AC}$. Vrijedi $|PC| = 2|LD|$, pa iz (2) slijedi $3|LD| = 2|ED|$, a otuda:

$$|LD| = 2\,|EL|. \tag{3}$$

Odatle zaključujemo da vrijedi $P_{\Delta ADL} = 2P_{\Delta AEL}$. Analogno zaključujemo da vrijedi $P_{\Delta DLP} = 2P_{\Delta LEP}$, a iz tih dviju jednakosti je $P_{\Delta ACP} = 2P_{\Delta ADP} = 4P_{\Delta AEP}$ i konačno $P_{\Delta ABP} = 8P_{\Delta AEP}$. Analogno se dokazuje $P_{\Delta ABP} = 8P_{\Delta PKB}$.



Slika 7.

5. Nastavljamo postupak upisivanja trokuta. Površinu prvog trokuta obilježimo s p_1, zbroj površina trokuta upisanih u drugoj iteraciji s p_2, u trećoj sa p_3 i tako redom. Dobivamo beskonačni niz:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots \tag{4}$$

pri čemu je svaki slijedeći član četverostruko manji od prethodnog, tj. vrijedi:

$$p_n + 1 = \frac{1}{4}\,p_n \tag{5}$$

Sada dobivamo koristeći (5): $4(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} + p_n) = 4p_1 + 4(p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} + p_n) = 4p_1 + (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1})$, to jest $4(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) + 4p_n = 4p_1 + (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1})$ odnosno $3(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) + 4p_n = 4p_1$. Podijelimo jednakost s 3 pa izlazi:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} + \frac{4}{3}\,p_n = \frac{4}{3}\,p_1. \tag{6}$$

6. Sada se može dokazati da je površina odsječka $P = \frac{4}{3}p_1$. Pretpostavimo suprotno, tj. ili je $P > \frac{4}{3}p_1$ ili je $P < \frac{4}{3}p_1$. Neka je:

$$P > \frac{4}{3}\,p_1. \tag{7}$$

Primijetili smo da možemo ponavljati proces upisivanja trokuta dok ne dobijemo po volji mali ostatak. Izaberimo n tako da vrijedi da je ostatak manji od $P - \frac{4}{3}p_1$, tj. $P - (p_1 + p_2 + \ldots p_n) < P - \frac{4}{3}p_1$, no to je u kontradikciji sa (6). Nejednakost (7) ne vrijedi.

Neka je:

$$P < \frac{4}{3} p_1. \qquad (8)$$

Kako članovi niza teže nuli možemo izabrati n takav da vrijedi $\frac{4}{3} p_n < \frac{4}{3} p_1 - P$. Koristeći (6) dobit ćemo $P < p_1 + p_2 + ... + p_n$, a to je nemoguće. Nejednakost (8) ne vrijedi.

Time je dokazano $P = \frac{4}{3} p_1$.

7. Vrijedi: *površina P odsječka parabole za jednu trećinu je veća od površine paraboli upisanog trokuta koji s odsječkom ima zajedničku osnovicu i visinu.*

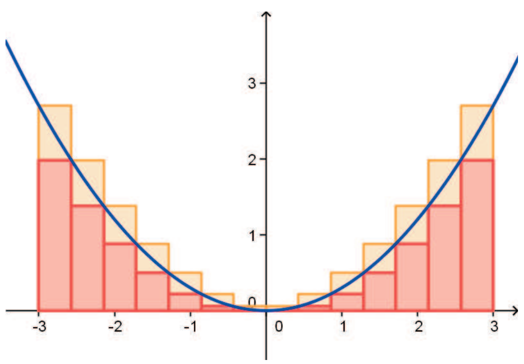
Zadaća o kvadraturi u "grčkom" smislu nema uvijek rješenje. Dokazano je da za krug ona nije rješiva. Nije moguće konstruirati (uz pomoć šestara i trokuta) kvadrat jednake površine kao krug. Vidjeli smo da je za parabolu to moguće.

U ovom je primjeru Arhimed ujedno i dokazao formulu za sumu beskonačnog geometrijskog reda iako je koristio samo konačne geometrijske nizove. Kako trokuti koji se dobiju u n-tom koraku imaju zbroj površina $p_n = \frac{p_1}{4^{n-1}}$, tada za zbroj površina svih trokutova vrijedi:

$$p_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-1}} + ...\right) = \frac{4}{3} p_1 .$$

Je li Arhimed poznavao koncept integriranja?

Pri proučavanju Arhimedovih metoda na um nam pada koncept integriranja koji je definirao Bernhard Riemann i metoda sažimanja – izračunavanje površine ili obujma rotacijskih tijela uz pomoć opisanih i upisanih mnogokuta. Arhimed ne koristi samo metodu iscrpljivanja s upisanim mnogokutima, već se oko lika "sažimaju" upisani i opisani mnogokuti tako da se razlika njihovih površina načini po volji malom. Koristio je ovu tehniku u izračunavanju površine kruga, u određivanju volumena rotacijskog elipsoida, paraboloida i hiperboloida. Unatoč tomu što nije poznavao pojam limesa, njegove metode su nalik na koncept gornje i donje sume koji danas koristimo u školskoj matematici za izračunavanje površine ispod luka parabole (vidi Dakić, Elezović: *Matematika 4, 2 dio*, 83. stranica), odnosno grafa neprekidne funkcije, kao i za izračunavanje obujma rotacijskog tijela.



Slika 8.

Arhimed je smatrao egzistenciju površine ravninskog lika i obujma tijela neupitnima unutar granica Euklidske geometrije. Odnosio se prema rezultatima kao da su utvrđeni nakon njegovih postupaka, ne istražujući jesu li rezultati ovisni o specifičnosti tih postupaka. Nije bio zainteresiran za razvoj poopćenja svojih metoda, već je tražio najprimjereniji geometrijski pristup za svaki novi problem. Često ih nije ni zabilježio. Unatoč tomu, njegovi su rezultati izvanredni i ostavili su neizbrisiv trag u povijesti matematike te utjecali na njen ukupni kasniji razvoj.