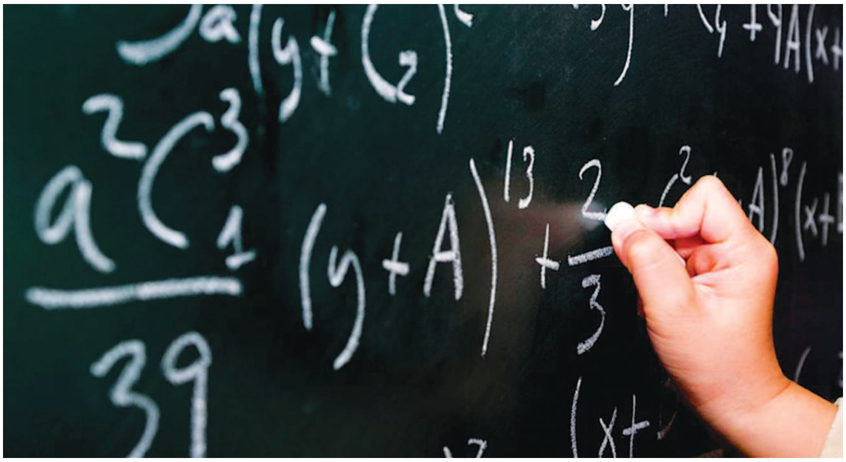
Četiri različita rješenja
jedne diofantske[1] jednadžbe trećeg stupnja



Šefket Arslanagić, Sarajevo

Poznato je da ne postoji "opći postupak" za rješavanje diofantskih nelinearnih jednadžbi, tj. algoritam kojim bismo mogli utvrditi ima li zadana jednadžba ili nema cjelobrojnih rješenja. Zato je često vrlo teško naći rješenja zadane nelinearne diofantske jednadžbe koja pripadaju skupu cijelih ili prirodnih brojeva, te dokazati ili opovrgnuti postojanje takvih rješenja. Upravo zadaci iz tog područja nesumnjivo čine red najzanimljivijih, po broju ideja toliko raznovrsnih da nije lako provesti neku sistematizaciju, davati, kako se to obično kaže, teorijsku podlogu za njihovo rješavanje. Sigurni smo da ne griješimo kada kažemo da će zadaci iz ovog područja teorije brojeva kod učenika najviše pridonijeti razvoju samostalnosti i originalnosti.

Sada ćemo na primjeru jedne diofantske jednadžbe trećeg stupnja prikazati točnost gore navedenog mišljenja. Naime, riječ je o sljedećem zadatku:

U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu:

$$x^3 - y^3 = 2xy + 13.$$

Rješenje 1. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 27 i oduzmimo od obje strane 8; dobijemo:

$$27x^3 - 27y^3 - 8 - 54xy = 343$$

ili:

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (3x) \cdot (-3y) \cdot (-2) = 343,$$

a odavde, koristeći identitet:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc):$$

$$(3x - 3y - 2)(9x^2 + 9y^2 + 4 + 9xy + 6x - 6y)$$
$$= 7 \cdot 49 = 1 \cdot 343.$$

Budući da je $x > y$, drugi faktor na lijevoj strani gornje jednadžbe veći je od prvog, te imamo ove dvije mogućnosti:

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - 3y - 2 = 7 \\ 9x^2 + 9y^2 + 4 + 9xy + 6x - 6y = 49 \end{cases}$$

[1] Diofant (3. st. p. K.), starogrčki matematičar.

i

$$\text{(II)}\begin{cases}3x - 3y - 2 = 1\\ 9x^2 + 9y^2 + 4 + 9xy + 6x - 6y = 343.\end{cases}$$

Rješavajući sustav (I) (ovdje je $x = 3 + y$), dobijemo rješenja $y_1 = -2$, $y_2 = -1$, odnosno $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Ovo ne mogu biti rješenja jer $x, y \in \mathbf{N}$.

Rješavajući sustav (II) (ovdje je $x = 1 + y$), dobijemo rješenja $y_3 = -4$, $y_4 = 3$, odnosno $x_3 = -1$, $x_4 = 4$. Rješenje $(-1, -4)$ ne zadovoljava uvjete pa ostaje samo jedno rješenje zadane jednadžbe: $(x, y) = (4, 3)$.

U ovom je rješenju bilo bitno oblikovati identitet za $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ i njegovu desnu stranu izraziti kao rezultat dvaju prirodnih brojeva, tj. $343 = 7 \cdot 49 = 1 \cdot 343$. Inače, ovo rastavljanje na faktore često se koristi kod rješavanja mnogih diofantskih jednadžbi.

Rješenje 2. U ovom ćemo rješenju iskoristiti činjenicu da je:

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)\\ &= (x - y) \cdot [(x - y)^2 + 3xy],\end{aligned}$$

te uvesti supstituciju:

$$x - y = u,\ \ xy = v;\ \ (u, v \in \mathbf{N}).$$

Sada zadana jednadžba postaje:

$$u(u^2 + 3v) = 2v + 13, \text{ tj.}$$

$$(3u - 2)v = 13 - u^3,$$

a odavde:

$$v = \frac{13 - u^3}{3u - 2}. \qquad (1)$$

Lako zaključujemo da $v \in \mathbf{N}$ jedino ako je $3u - 2 = 1$, tj. $u = 1 \Rightarrow v = 12$.

Sada imamo:

$$x - y = 1, xy = 12$$

$$\Rightarrow y(1 + y) = 12$$

$$\Rightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (y + 4)(y - 3) = 0$$

$$\Rightarrow y = -4 \notin \mathbf{N} \ \vee \ y = 3 \in \mathbf{N}.$$

Za $y = 3 \Rightarrow x = 4$.

Dakle, jednadžba ima samo jedno rješenje $(x, y) = (4, 3)$.

Dokažimo sada da jednadžba (1) nema drugih rješenja u skupu $\mathbf{N}$.

Ako je u paran broj, tada je u izrazu (1) nazivnik također paran broj, dok je brojnik $13 - u3$ neparan broj pa $v \notin \mathbf{N}$.

Ako je u neparan broj, tada je u (1) nazivnik $3u - 2$ neparan broj, dok je brojnik $13 - u3$ paran broj pa opet $v \notin \mathbf{N}$.

Ovime je dokazano da zadana jednadžba nema drugih rješenja osim $(x, y) = (4, 3)$.

U ovom rješenju je bilo bitno uočiti da se zadana jednadžba može izraziti pomoću $x - y$ i xy, pa onda uvesti odgovarajuće supstitucije $u = x - y$, $v = xy$. Svakako, potrebno je i bitno dokazati da dobivena jednadžba (1) nema drugih rješenja osim $u = 1$, $v = 12$.

Rješenje 3. Ovo rješenje veoma je zanimljivo i temelji se na činjenici da mora biti $x^3 - y^3 > 0$, budući da je $2xy + 13 > 0$. Iz $x^3 - y^3 > 0$, slijedi da je $x^3 > y^3$, tj. $x > y$ pa možemo uvesti supstituciju $x = y + k$; $k \in \mathbf{N}$. Sada zadana jednadžba postaje:

$$(y + k)^3 - y^3 = 2y(y + k) + 13, \text{ tj.}$$

$$k^3 + 3y^2k + 3yk^2 + y^3 - y^3 - 2y(y + k) = 13,$$

ili:

$$k^3 + 3yk(y + k) - 2y(y + k) = 13,$$

odnosno:

$$k^3 + (y + k)(3yk - 2y) = 13. \qquad (2)$$

Očigledno je $y + k > 0$ i $3yk - 2y = y(3k - 2) > 0$ za sve $y, k \in \mathbf{N}$.

Sada iz (2) zaključujemo da mora biti $k^3 < 13$, tj. $k \in \{1, 2\}$.

1° Za $k = 1$ dobijemo iz (2):

$$1 + (y + 1)(3y - 2y) = 13, \text{ tj.}$$

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

$$y_1 = -4, y_2 = 3.$$

Iz $x = 1 + y \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 4$.

Rješenje je $(x, y) = (4, 3)$ jer rješenje $(-3, -4)$ ne zadovoljava uvjete.

2º Za $k = 2$ dobijemo iz (2):

$$8 + (y + 2)(6y - 2y) = 13, \text{ tj.}$$

$$4y^2 + 8y - 5 = 0,$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbf{N},\ y_2 = -\frac{5}{2} \notin \mathbf{N}$$

te ova rješenja ne zadovoljavaju uvjete.

Dakle, zadana jednadžba ima samo jedno rješenje u skupu $\mathbf{N}$: $(x, y) = (4, 3)$.

Ovo rješenje zaista je veoma elegantno i temelji se na činjenici da mora biti $x > y$, tj. $x = y + k$; $k \in \mathbf{N}$. Dobivena jednadžba (2) veoma je pogodna za razmatranje u cilju nalaženja vrijednosti k.

Rješenje 4. Očigledno je $x - y > 0$, tj. $x > y$ jer je desna strana jednadžbe pozitivna za $x, y \in \mathbf{N}$. Pretpostavimo da je:

$$x - y \geq 2; \qquad (3)$$

tada je $(x - y)^2 \geq 4$, tj.

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3xy + 4, \qquad (4)$$

te zbog $x, y \in \mathbf{N}$ i (3) također:

$$xy \geq 3. \qquad (5)$$

Sada je:

$$13 = x^3 - y^3 - 2xy = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 2xy$$

$$\overset{(3)}{\geq} 2(x^2 + xy + y^2) - 2xy \overset{(4)}{\geq} 2(3xy + 4) - 2xy$$

$$= 4xy + 8 \overset{(5)}{\geq} 20.$$

Dolazimo do kontradikcije, pa mora biti $x - y < 2$, tj. zbog $x > y$: $x - y = 1$, a odavde $x = y + 1$. Supstitucijom $x = y + 1$ u zadanu jednadžbu, dobivamo:

$$(y + 1)^3 - y^3 = 2(y + 1)y + 13, \text{ tj.}$$

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

čija su rješenja $y_1 = -4,\ y_2 = 3 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 4$.

Budući da je $x, y \in \mathbf{N}$, jedino rješenje je $x = 4$, $y = 3$; tj. $(x, y) = (4, 3)$.

I ovo je rješenje elegantno i kratko i temelji se na činjenici da mora biti $x > y$. Ideja dokaza je oboriti pretpostavku da je $x - y \geq 2$; $(x, y \in \mathbf{N})$ i dobiti $x = y + 1$. Zatim supstitucijom $x = y + 1$ u zadanu jednadžbu odmah dobijemo njezino rješenje.

Na kraju se možemo samo složiti s riječima navedenim na početku ovog rada kada je u pitanju rješavanje netipičnih diofantskih jednadžbi višeg reda. Mislim da će primjer rješavanja ove diofantske jednadžbe trećeg stupnja pomoći potencijalnim čitateljima ovog članka, općenito pri rješavanju drugih nelinearnih diofantskih jednadžbi. U tu svrhu predlažem čitateljima da riješe sljedeće nelinearne diofantske jednadžbe u skupu $\mathbf{N}$:

$x^3 - y^3 = 999$, (Olimpijada u DDR-u, 1968.);

$x^5 - y^5 = 16\,775$, (nepoznat autor);

$x^3 - y^3 = xy + 61$, (Olimpijada u SSSR-u, 1981.);

$x^3 - y^3 = xy + 1995$, (Olimpijada u Indiji, 1995.);

$x^3 + y^3 + 3xy = 1$, (I. Cucurezeanu, Rumunjska);

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$, gdje $x, y, z \in \mathbf{N}$, a p je prost broj veći od 3 (T. Andreescu i D. Andrica);

$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x^2 = 2(y + z) \end{cases}$ (sustav jednadžbi, E.W. Marchand);

$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \\ x + y + z = x^2 \end{cases}$ (sustav jednadžbi, I. Cucurezeanu);

a) u skupu $\mathbf{N}$; b) u skupu $\mathbf{Z}$.

LITERATURA

[1] Andreescu, T., Andrica, D., *Introduction to Diophantine Equations*, Gil Publishing House, Zalau, 2002.

[2] Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[3] Cucurezeanu, I., *Ecuatii in numere intregi*, Aranis Print, Bucuresti, 2006.

[4] Mićić, V., Kadelburg, Z., Đukić, D., *Uvod u teoriju brojeva*, Materijali za mlade matematičare, Sveska 15, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2004.