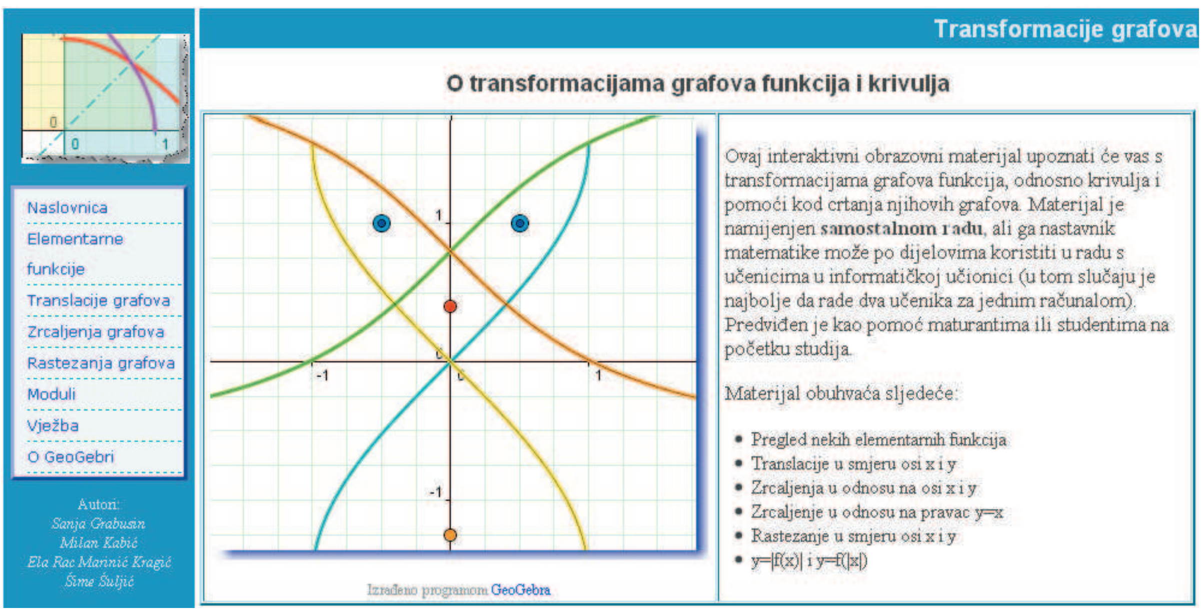
Transformacije grafova funkcija i krivulja

Milan Kabić, Zagreb



Slika 1. Naslovnica i sadržaj. Materijali se mogu koristiti po dijelovima, u raznim situacijama i na raznim razinama. Bit će od velike pomoći onima koji poučavaju i onima koji uče.

Na web stranicama ***Normale***, udruge za promicanje nastave matematike, na adresi **http://www.normala.hr/interaktivna_matematika/index.html**, nedavno je svjetlo dana ugledao interaktivni obrazovni materijal pod naslovom *O transformacijama grafova funkcija i krivulja*.

Uvod

To je jedan od najopsežnijih, a u matematičkom smislu i najzahtjevnijih radova te vrste dosad objavljen na hrvatskom jezičnom području. Odlikuje se visokim stupnjem interaktivnosti, kvalitetnom tehničkom izvedbom i estetskom dotjeranošću. Izradili su ga Šime Šuljić, Ela Rac Marinić Kragić, Sanja Grabusin i Milan Kabić, četvero profesora matematike koji su svoje dugogodišnje nastavničko iskustvo, koristeći modernu tehnologiju, pretočili na ove virtualne stranice.

Ovi su sadržaji namijenjeni nastavnicima, učenicima srednjih škola i studentima prvih godina studija. Zbog svog priručničkog karaktera i didaktičke vrijednosti dobro će poslužiti nastavnicima kod pripreme za nastavu. U učionici s računalom i projektorom dijelovi se mogu koristiti u raznim nastavnim jedinicama: kod obrade novog gradiva, pri rješavanju zadataka i uvježbavanju te ponavljanju i sistematiziranju gradiva. Njime se također mogu proširiti obavezni programski sadržaji. Nastavnicima koji se budu igrali prolazeći ovim sadržajima, sigurno će pasti na um pomisao kako su dobili priliku da osvježe panoe u svojim učionicama. Materijali su također namijenjeni za samostalan rad. Učenici će ga koristiti pri učenju istraživanjem i otkrivanjem ili pri ponavljanju pred maturu, a studenti kod ponavljanja dijelova gradiva iz područja funkcija.

Materijali se mogu koristiti po dijelovima u raznim situacijama i razinama. Evo samo nekoliko područja srednjoškolske matematike u kojima će naći svoju primjenu: kvadratna funkcija, polinomi, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije, injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije, inverzna funkcija, pregled osnovnih elementarnih funkcija, transformacije grafova funkcija i krivulja, krivulje drugog reda, grafičko rješavanje raznih nejednadžbi i sustava nejednadžbi, određivanje broja rješenja jednadžbe, rješavanje određenih integrala itd.

U visokoškolskoj će matematici biti od pomoći studentima kad god moraju skicirati graf funkcije koja je nastala transformacijama grafova osnovnih elementarnih funkcija – a takvih je područja u višoj matematici mnogo. O tome je bilo riječi u prošlom broju MIŠ-a.

Autori ovih internetskih stranica nastojali su učenicima i nastavnicima koji se još nisu susretali s *GeoGebrom* omogućiti da prolazeći sadržajima i slijedeći kratke i jasne upute samostalno svladavaju *GeoGebru*. Naime, kod mnogih apleta ostavljena je traka s *izbornicima*, *alatna traka* ili samo pojedini alati koje korisnik mora koristiti kako bi nešto dodao, izmijenio ili konstruirao. Također je često vidljivo i *polje za unos* u koje korisnik unosi razne naredbe ili simboličke zapise (jednadžbe) objekata. Na samom kraju ovog rada prikazana je slika *GeoGebrina* prozora s ispisanim nazivima svih njegovih dijelova i link na *GeoGebrine* službene stranice. Na njima se nalazi dostupna online **GeoGebra pomoć** na hrvatskom jeziku, sa svim potrebnim uputama o korištenju ovog programa.

Na prvoj stranici iza naslovnice dane su precizne tehničke upute kako prolaziti kroz ove materijale. Kako ove stranice čine **interaktivni** i **dinamični** *Java* apleti, za pregledavanje sadržaja potreban je preglednik s instaliranom **Javom**, o čemu su dane i upute. Prelazak sa stranice na stranicu omogućuju linkovi za naprijed i natrag na dnu svake stranice. Ako ne želite pratiti linearni slijed stranica, već kroz materijal hoćete prolaziti svojim redoslijedom, to ćete postići tako da u lijevom stupcu naslovnice u vidljivom izborniku kliknete na naslov koji vas zanima.

Sadržaj

Rad čini niz od 32 samostalna *Java* apleta, dvije *flash* animacije i 20 PDF dokumenata s uputama, rješenjima zadataka ili dokazima. Sve je to složeno u šest cjelina.

1. Elementarne funkcije
2. Translacije grafova
3. Zrcaljenja grafova
4. Rastezanja i stezanje grafova
5. $y = |f(x)|$ i $y = f(|x|)$
6. Vježba

1. Elementarne funkcije

Smatram da je u gimnazijskom programu i programu tehničkih škola ova tema nedovoljno naglašena, kao i tema transformacije grafova funkcija. Obje su važne za nastavak školovanja na tehničkim i prirodoslovno-matematičkim fakultetima. Učenici su tijekom srednjoškolskog obrazovanja upoznali sve osnovne elementarne funkcije osim hiperbolnih i area funkcija. No ipak se pokazuje potreba da se napravi jedna temeljita sistematizacija i ponavljanje i da se prošire neki sadržaji koji nisu dovoljno obrađeni u prethodnom školovanju. U tu će svrhu ovo poglavlje izvrsno poslužiti. Pritom težište treba staviti na poznavanje grafova osnovnih elementarnih funkcija, jer to je preduvjet da bi se mogle uspješno prepoznavati krivulje koje su nastale transformacijama tih grafova. Zatim treba poučiti učenika kako s grafa očitati bitne informacije i svojstva funkcije kao što su: domena, skup vrijednosti, omeđenost, supremum, infimum, sjecišta s koordinatnim osima, asimptote, grafičko rješavanje jednadžbi i nejednadžbi, intervali rasta i pada, ekstremi,... Dakako, bez uporabe derivacija. Time se ujedno priprema spoznaja o važnosti derivacija pri određivanju intervala monotonosti, konkavnosti i konveksnosti, te ekstrema i točaka infleksije funkcije.

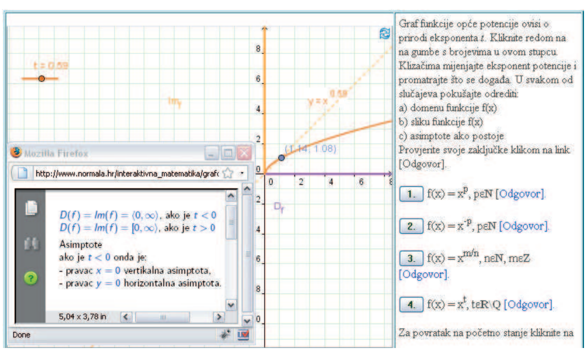
U ovoj cjelini, kroz 11 apleta, pored polinoma obrađene su sljedeće osnovne elementarne funkcije:

- opća potencija $f(x) = x^t$, $t \in \mathbf{R}$,
- eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$,
- logaritamska funkcija $f(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,

- trigonometrijske funkcije: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$ i $\mathrm{ctg}\, x$,
- ciklometrijske funkcije: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$ i $\mathrm{arcctg}\, x$.

Opća potencija $f(x) = x^t$

S pomoću gumba 1. – 4. (vidi sliku 2.) korisnik može birati funkcije redom s prirodnim, negativnim cijelim, racionalnim i iracionalnim eksponentom. Klizačima **p**, **n**, **m** i **t** mijenjaju se eksponenti, pa se može promatrati kako priroda eksponenta utječe na graf, a samim tim i na razna svojstva funkcije.



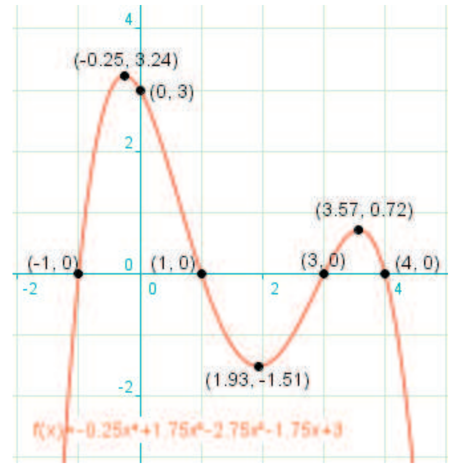
Slika 2. Skočni izbornik s točnim odgovorima.

Posebna pozornost usmjerena je na određivanje domene, kodomene i asimptota. Odgovarajući na postavljena pitanja, učenik ili student može provjeriti vlastito znanje, uspoređujući svoje odgovore s točnim odgovorima koje pronađe klikom na odgovarajući link.

Polinomi

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

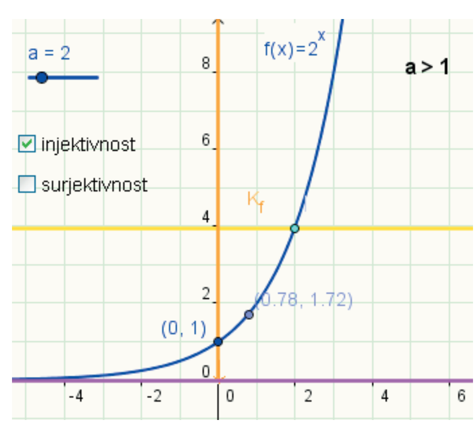
Mijenjajući klizačima vrijednosti koeficijenata u ovom apletu mogu se promatrati polinomi od nultog do petog stupnja. Dane su upute kako koristiti GeoGebrine naredbe za određivanje nultočki, sjecišta s y-osi i ekstrema polinoma, ali i razni načini zadavanja polinoma upisom naredbi u *polje za unos*. U prvom zadatku provjeravaju se neke teorijske činjenice i sposobnost rješavanja zadataka. Zadatak se također može riješiti koristeći se *GeoGebrinim* naredbama. Ako se zapne, tu je uputa, pomoć i na kraju mogućnost provjere je li zadatak točno riješen.



Slika 3. Graf polinoma 4. stupnja s istaknutim karakterističnim točkama.

Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$

Kao i u prethodnim apletima, i ovdje se učenici mogu neograničeno igrati mijenjajući vrijednosti baze **a** i promatrati kakav utjecaj te promjene imaju na graf i svojstva funkcije. Da bi mogli odgovoriti na pitanje je li funkcija bijekcija, mogu se poslužiti svojevrsnim pokusima. Uključivanjem *kontrolnih okvira za prikaz i skrivanje objekata*, gumbima ispod apleta mogu pokrenuti dvije animacije, nezavisne jedna od druge ili pak istovremeno obje. Kod prve je animacije riječ o horizontalnom testu injektivnosti (slika 4.).

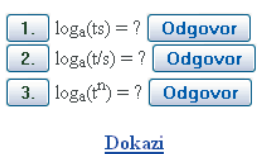


Slika 4. Horizontalni test injektivnosti eksponencijalne funkcije.

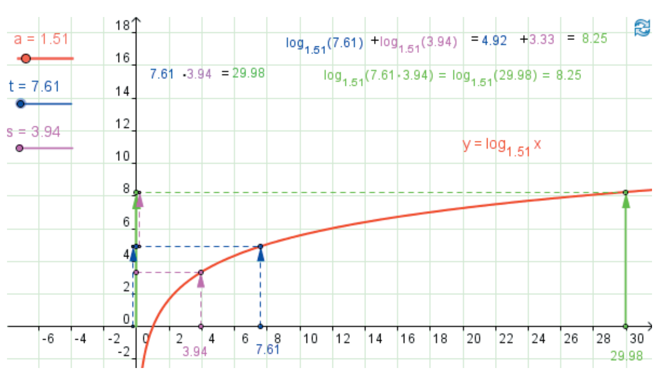
Paralela s x-osi se giba i promatrač točno vidi da ona siječe graf u najviše jednoj točki. Kad se uključi drugi *kontrolni okvir*, može se pratiti točka koja gibajući se prolazi sve vrijednosti kodomene, a strelicama je povezana sa svojim originalom u domeni, što je na neki način eksperimentalna provjera surjektivnosti. Animaciju je moguće zaustaviti u svakom trenutku i, ako treba, ponovno pokrenuti. Također, u svakom se trenutku može vratiti početno stanje.

Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$

Ovaj se aplet slobodno može nazvati pravim laboratorijem. Jedno od postavljenih pitanja na koje treba dati odgovor glasi: Čemu je jednak logaritam produkta, kvocijenta i potencije?

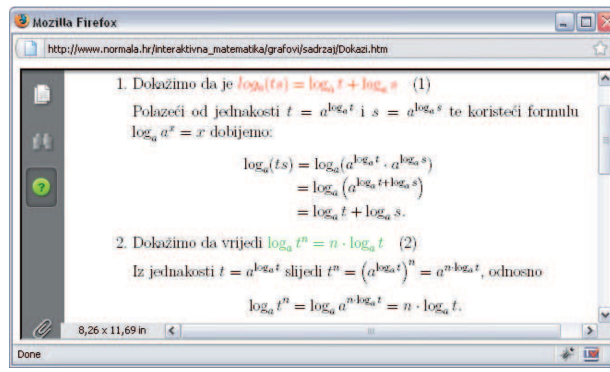


Prije odgovora na postavljena pitanja klikom na bilo koji gumb 1., 2. ili 3. pokaže se aplet na kojem je moguće eksperimentirati, mijenjajući s pomoću klizača vrijednosti argumenta t i s, ali i baze a (slika 5.).



Slika 5. $\log_a(ts) = ?$ Onima koji znaju formulu, aplet će poslužiti da je provjere za razne vrijednosti argumenata t i s.

Na apletu su vidljive lijeva i desna strana formule koju treba otkriti, jedna ispod druge, ali kao brojevni izrazi koji ovise o vrijednostima argumenata t i s. Mijenjajući vrijednosti argumentima t i s istovremeno se mijenjaju i vrijednosti spomenutih izraza. Kako su te vrijednosti uvijek jednake, brzo se dođe do odgovora. Kod izrade ovih materijala pazilo se da učenik previše ne luta, da ga ne odvlače sporedne stvari, tj. da se u svom istraživanju ne izgubi. Zato se on diskretno vodi tijekom svog eksperimentiranja, istraživanja i otkrivanja. Postavlja se niz pažljivo odabranih, ciljanih pitanja i zadataka. Odgovarajući na njih, učenik se približava željenom zaključku i uspjeh je izvjestan. To kod učenika stvara osjećaj sigurnosti i uspješne komunikacije s računalom, što ga dodatno motivira. Kod svakog pitanja nudi mu se pomoć. Kad je odgovorio na pitanje, donio zaključak ili riješio zadatak, korisnik klikom na odgovarajući gumb provjerava točnost svoga odgovora. I tu nije kraj. Ako odgovor nije ispravan, korisnik može ponoviti ponuđenu vježbu neograničen broj puta, i to vlastitim tempom i ritmom. Dakle, ima mogućnost više puta ponovno istraživati, otkrivati sve dok ne dođe do točnog odgovora. Tako stečeno znanje ostavlja duboki trag u memoriji pojedinca.



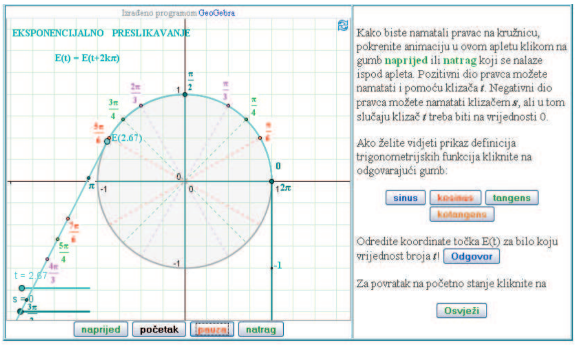
Slika 6. Klikom na link **Dokazi** pojavi se skočni izbornik u PDF-u u kojem su dani dokazi svih triju formula.

Kad učenik nešto eksperimentom utvrdi, neće osjetiti potrebu da to matematički i dokaže. Radije će ostati na razini vjerovanja da je tomu tako. Matematika jest, a takva je od trenutaka svog nastajanja, eksperimentalna i induktivna. Istovremeno je ona stroga deduktivna znanost. Da bi se istaknulo kako eksperimentalno dobiveni rezultati moraju proći matematičku verifikaciju, a to je matematički dokaz, na nekoliko su mjesta dani strogi dokazi formula do kojih učenici dolaze eksperimentirajući, vođeni uputama danim u apletima. Na taj se način upozorava na egzaktnost matematike kao znanosti i na nužnost dokazivanja slutnji i ideja.

Trigonometrijske funkcije

U ovom radu posebna je pozornost posvećena definiranju trigonometrijskih funkcija s naglaskom na eksponencijalnom preslikavanju. Dva su apleta s trigonometrijskim funkcijama. U prvom je dan prikaz njihovih definicija, a u drugom prikaz definicije zajedno s grafom.

Definiranje trigonometrijskih funkcija preko eksponencijalnog preslikavanja poprilično je zamršeno, apstraktno i nejasno učenicima. Priče o namatanju, ordinatama i apscisama, bez formula, uzrokuju nesigurnost kod učenika. Samim time ni inverzne, tj. ciklometrijske funkcije ne sjedaju glatko. Na apletu (vidi sliku 7.) korisnik može pokrenuti namatanje pravca na kružnicu koristeći dva klizača, jedan za namatanje pozitivnog dijela pravca, a drugi za namatanje negativnog dijela. Drugi način je da pokrene animaciju.

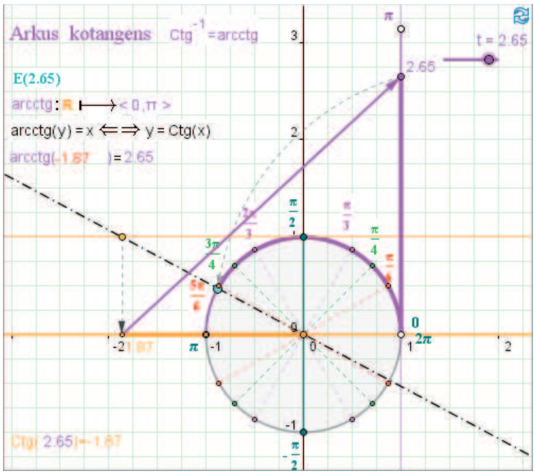


Slika 7. Eksponencijalno preslikavanje zajedno s definicijama trigonometrijskih funkcija.

Istovremeno dok traje animacija, tj. dok se pravac namata na kružnicu, promatrač može klikom na jedan od guma sinus, kosinus, tangens i kotangens uključiti prikaz odgovarajuće trigonometrijske funkcije. Animaciju, naravno, može zaustaviti u svakom trenutku, a onda je ponovno pokrenuti ili vratiti na početak. Dok se pravac namata na kružnicu, a točka $E(t)$ klizi po kružnici, promatrač pred očima ima jasnu sliku kako se dolazi do vrijednosti neke trigonometrijske funkcije na konkretnom realnom broju t. S druge strane, sad će jasnije uočiti da su trigonometrijske funkcije kompozicije dvaju preslikavanja i da je namatanje pravca na kružnicu pripremna faza za definiciju svake od njih.

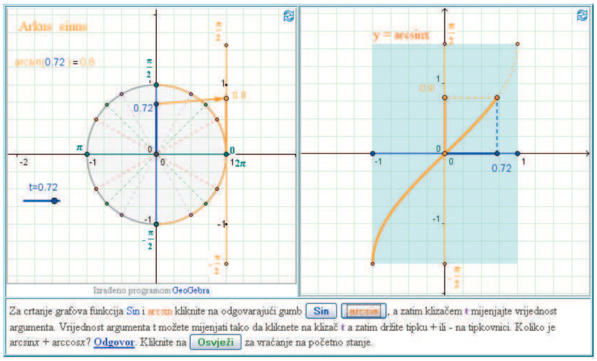
Ciklometrijske funkcije

Obradi ciklometrijskih funkcija posvećeno je najviše prostora. Na prvom apletu prikazane su definicije svih četiriju, zajedno s restrikcijama trigonometrijskih funkcija. Iza toga slijede četiri apleta, po jedan za svaku. Na njima je uz prikaz definicije prikazan i graf (vidi sliku 9.).



Slika 8. Prikaz definicije arkus kotangensa.

Ovi će apleti svojom zornošću, interaktivnošću i dinamičnošću pomoći učenicima i studentima u osnovnom razumijevanju trigonometrije. Namatanje pravca na kružnicu samo po sebi, ali i u kombinaciji s prikazom definicija trigonometrijskih funkcija, ostavit će dojam na učenika. Kad promatrač klikom na klizač koji pokreće promjene nezavisne varijable t stisne tipku + ili –, na apletu sve živne, počne pulsirati i kretati se u jednoj harmoniji boja, oblika i brojeva. Tankoćutna matematička



Slika 9. Graf arkus sinusa zajedno s prikazom njegove definicije.

duša zatitra pred jednostavnošću, elegancijom i veličanstvenom matematičkom ljepotom u koju je nemoguće proniknuti pukim iščitavanjem matematičkog teksta.

Čak i na nekim virtualnim mjestima, poput portala "Nikola Tesla", korisnici ostaju prikraćeni za takav doživljaj matematike. Prolazeći matematičkim sadržajima na spomenutom portalu, namjernik se osjeća poput televizijskog gledatelja koji pasivno prati utakmicu, dok ga monotoni spikerov glas umara ili nervira. Kod ovih apleta on odmah postaje aktivni igrač koji određuje tempo i ritam. Kroz igru istražuje, ispituje, provjerava hipoteze i pretače ih u matematičke spoznaje.

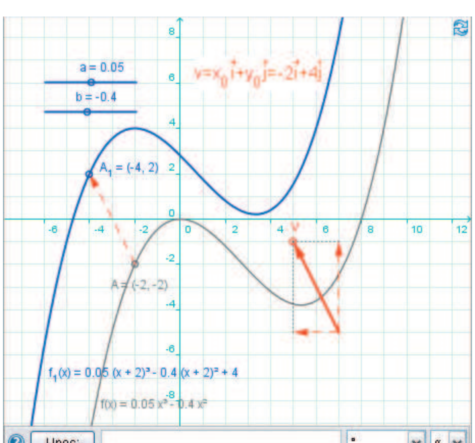
* * *

Ovim je prikaz prvog uvodnog dijela završen. Dio koji slijedi po opsegu i sadržaju je dvostruko veći. U njemu su obrađene transformacije grafova i krivulja. Već je u opisu prvog dijela rečeno dosta o strukturi, metodologiji, stilu, tehnici i ostalim karakteristikama ovog rada, što je dovoljno da bi se stekla određena predodžba o njemu. Zato ću u opisu preostalih cjelina dati najosnovnije informacije.

2. Translacije grafova

U prvim trima apletima ispituje se kakve sve promjene izaziva pomak krivulje $y = f(x)$ za vektor $\vec{v} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, u njezinoj jednadžbi. Eksperimentalnim putem dolazi se do jednadžbe

$$y = f(x\text{-}x_0) + y_0.$$

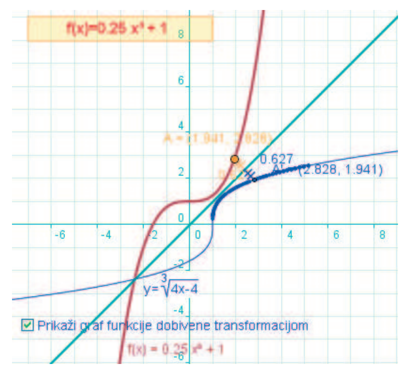


Slika 10. Početna funkcija $f(x)$ može se redefinirati.

U četvrtoj lekciji postavljen je obratan problem od onog koji je rješavan u prethodnim trima. Treba nacrtati graf funkcije $g(x) = f(x\text{-}x_0) + y_0$ ako je poznat graf funkcije $f(x)$. Pritom se funkcija $f(x)$ može unedogled mijenjati. Osim provjere, ovdje postoji gumb koji pokreće animaciju crtanja karakterističnih točaka grafa $y = f(x\text{-}x_0) + y_0$. U petom se apletu rješavaju slični problemi s elipsom.

3. Zrcaljenja grafova

U prvim trima apletima obrađena su zrcaljenja u odnosu na x-os, y-os i pravac $y = x$. U preostalim trima apletima korisnik rješava razne zadatke.



Slika 11. Osna simetrija u odnosu na pravac $y = x$.

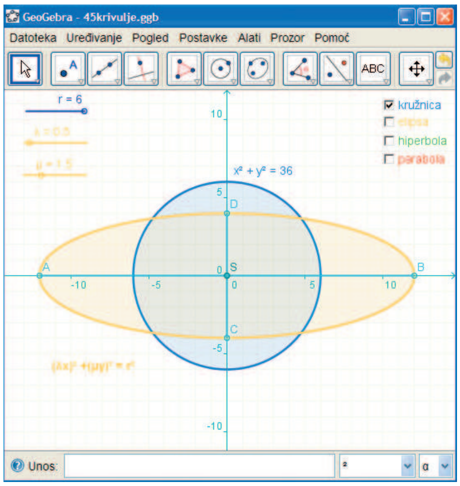
4. Rastezanja i stezanje grafova

U prvom od sedam apleta, koliko ih ima u ovoj cjelini, promatraju se grafovi dviju funkcija:

$$f(x) = a \sin x \text{ i } g(x) = \sin (bx).$$

Klizačima se mijenjaju vrijednosti koeficijentima a, odnosno b, i istovremeno se promatra kako njihove promjene utječu na promjene kod grafova.

U drugom apletu se promatra funkcija $g(x) = a\, f(x)$, $a \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ – rastezanje/stezanje u smjeru y-osi, a u trećem $g(x) = f(bx)$, $b \in \mathbf{R}\backslash\{0,1\}$ – rastezanje/stezanje u smjeru x-osi. I u ovim dvama apletima se vrijednosti koeficijenata a i b mogu mijenjati klizačima i pratiti istovremeno posljedice na grafovima. Pritom se u ovim apletima ne radi o jednoj funkciji, nego se pritiskom na reset ikonu generiraju nove funkcije u dovoljno velikom broju kako bi se došlo do valjanog zaključka. U četvrtom



Slika 12. Kompozicija dviju transformacija kružnice: kontrakcija u smjeru y-osi i dilatacija u smjeru x-osi.

je apletu kompozicija dviju transformacija rastezanje/stezanje u smjeru x-osi i pomaka u smjeru x-osi. Peti i šesti su posvećeni konikama, tj. njihovu stezanju ili rastezanju u smjeru koordinatnih osi, a zadnji je svojevrsno ponavljanje u obliku vježbe.

5. Moduli $g(x) = |f(x)|$ i $g(x) = f(|x|)$

U ovoj su cjelini dva apleta. Prvi se odnosi na transformaciju $g(x) = |f(x)|$, a drugi na transformaciju $g(x) = f(|x|)$. U drugom apletu zadan je jedan zadatak s Državnog natjecanja održanog 1997. godine, za 1. razred.

Zadatak glasi: Neka je n prirodan broj. Nađite sva rješenja jednadžbe:

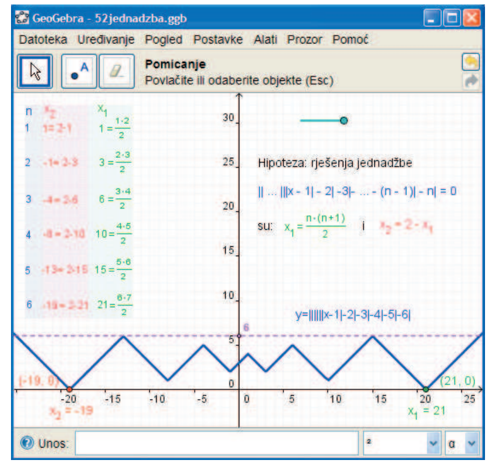
$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|-\ldots-(n-1)\right|-n\right|=0.$$

Rješenja jednadžbe moguće je brzo naslutiti ako koristeći *GeoGebru* skiciramo grafove funkcija $f_1(x) = |x-1|$, $f_2(x) = ||x-1|-2|$, … jer su rješenja gornje jednadžbe nultočke funkcije:

$$f_n(x) = ||\ldots|||x-1|-2|-3|-\ldots-(n-1)|-n|$$

(vidi sliku 13.).

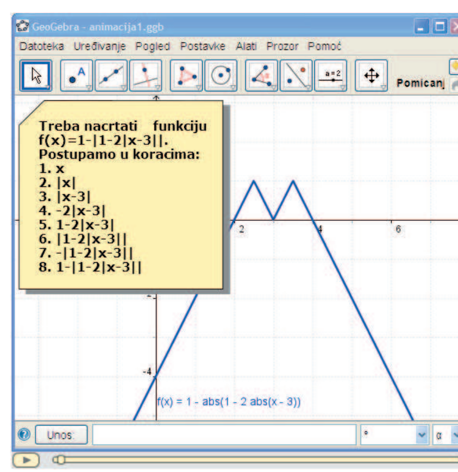
Ako se zapne u dokazivanju, klikom na link **Dokazi** pojavi se skočni izbornik u PDF-u u kojemu je dan dokaz matematičkom indukcijom.



Slika 13. Hipotezu treba još i dokazati.

6. Vježba

U posljednjem dijelu ovog rada dane su dvije *flash* animacije u kojima su prikazane kompozicije od više osnovnih transformacija.



Slika 14. Kompozicija sedam osnvnih transformacija.

O ovom materijalu moglo bi se još mnogo toga napisati. Najbolje ćete ga upoznati ako ga isprobate u ulozi učenika. Pritom će svaka vaša sugestija biti dobrodošla i ozbiljno razmotrena u cilju otklanjanja eventualnih manjkavosti ili mogućih grešaka. Zato vas molim da svoje dojmove i primjedbe uputite na sljedeću adresu:

udruga@normala.hr