

Državno natjecanje 2009.

– analiza zadataka



Neda Lesar, Zagreb

Državno Natjecanje iz matematike održano je od 29. ožujka do 1. travnja 2009. godine.

Sudjelovalo je 286 učenika:

- troje učenika 7. razreda osvojilo je 47 i dvoje 45 od maksimalnih 50 bodova;
- petero učenika osmih razreda osvojilo je maksimalnih 50 bodova;
- u A kategoriji maksimalni osvojeni bodovi (od 100) su za prvi razred 85, za drugi 99, za treći 83 i za četvrti 68;
- u B kategoriji maksimalni osvojeni bodovi (od 100) su za prvi razred 82, za drugi 73, za treći 50 i za četvrti 98.

Slaba riješenost testa za treći razred B kategorije potaknula me je da pregledam sve učeničke radove, analiziram načine rješavanja pojedinih zadataka i da vidim gdje su učenici najčešće i najviše griješili.

Budući da svaki zadatak ima 20 bodova, zanimalo me koliko je učenika svaki pojedini zadatak riješilo

uspješno i do kraja (i osvojilo maksimalnih 20 bodova), koliko ih nije osvojilo niti jedan bod (i koji su razlozi tomu – da li zadatak nisu uopće pokušavali rješavati, jesu li krenuli rješavati u krivom smjeru ili su krenuli u dobrom smjeru, ali na samom početku napravili presudne pogreške), a ostale sam bodove podijelila u grupe: od 1 do 4 boda, od 5 do 9 bodova, od 10 do 14 i od 15 do 19 bodova.

Evo ishoda.

Zadatak 1.

Nađi sva realna rješenja jednadžbe:

$$4x^3 - \sqrt{1-x^2} - 3x = 0$$

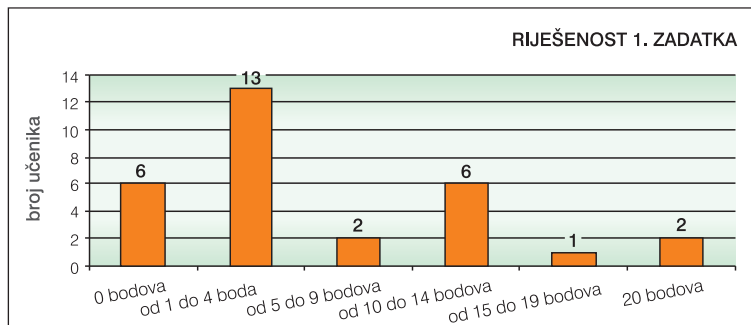
(vidi [1]).

Državno je povjerenstvo za Natjecanje iz matematike predvidjelo dva načina rješavanja prvog zadataka. Jedan način je prebacivanjem korijena na desnu stranu znaka jednakosti i kvadriranjem,

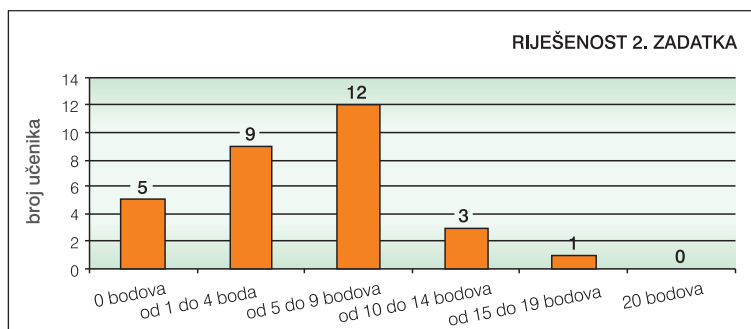
a drugi je način rješavanje trigonometrijskom supstitucijom $x = \sin \alpha$, pri čemu je $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Teško je procijeniti koji je od ta dva načina jednostavniji ili lakši. Ipak, samo je pet učenika rješavalo zadatak trigonometrijskom supstitucijom.

Uspješnost u rješavanju ovog zadatka vidi se iz grafičkog prikaza na slici 1.

Iz prikaza je vidljivo da su dva učenika uspješno riješila cijeli zadatak. Interesantno je da je jedan od njih rješavao kvadriranjem, a drugi trigonometrijskom supstitucijom. Dakle, što je jednostavnije i lakše je individualno.



Slika 1.



Slika 2.

Svi su učenici pokušavali nešto napraviti. Šestero učenika koji nisu u ovom zadatku osvojili niti jedan bod jesu učenici koji su krenuli rješavati kvadriranjem, ali su u samom postupku kvadriranja napravili pogrešku. Ideja o načinu rješavanja ovog zadatka kvadriranjem nije se bodovala, jer je stav Povjerenstva da državni natjecatelj treba kvadriranje obaviti potpuno točno.

Prvi zadatak većini je učenika postao problem u trenutku kada se dođe do jednadžbe 6. stupnja $16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$. Dio učenika nije ju prepoznao kao jednadžbu koja se supstitucijom svodi na jednadžbu 3. stupnja, a oni koji su to prepoznali nisu dobivenu jednadžbu znali rastaviti na faktore. Uočen je i propust da se jednadžba supstitucije uspješno riješila, ali se onda zaboravilo vratiti na x .

Najveći problem u ovom zadatku (kao i u cijelom testu) su bili uvjeti koji su prouzročili manjak ili višak rješenja (u ovom zadatku – čak i do 25 rješenja).

Zadatak 2.

Za realan broj $a > 0$, $a \neq 1$ dana je funkcija $f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x$. Uzavisnosti o parametru a nađi sva rješenja jednadžbe $f(x+a^2-a) = 2f(x)$.

Uspješnost u rješavanju ovog zadatka vidi se iz grafičkog prikaza na slici 2.

Već pri prvom pogledu vidljivo je da niti jedan učenik nije riješio kompletan zadatak. Maksimalni broj osvojenih bodova je 15 i to je postigao samo jedan učenik. I ovdje su najveći problem bili uvjeti i diskusija rješenja.

U postupku rješavanja, logaritamska se jednadžba svodi na kvadratnu $x^2 - x + a - a^2 = 0$. Najveći broj učenika (12) uspješno je došao do tog koraka.

Samo je jedan učenik ovu jednadžbu dalje rješavao faktorizacijom, svi ostali preko formule za rješenja kvadratne jednadžbe što im je prouzročilo dosta problema, nekoliko pogrešaka i na kraju netočno rješenje.

Učenik koji je osvojio maksimalnih 15 bodova u ovom zadatku došao je do rješenja, čak ih je i provjerio, ali ih nije do kraja proanalizirao i prodiskutirao uvažavajući postavljene uvjete.

Zadatak 3.

Izračunaj zbroj:
$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cdot \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cdot \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cdot \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos 2008 \cdot \cos 2009}.$$

Zadatak 3. najlošije je riješen zadatak u cijelom testu. Dvoje učenika uspješno je riješilo cijeli zadatak (i osvojilo maksimalnih 20 bodova), dvoje je započelo, ali odustalo, a 26 učenika nije imalo ni boda.

Svi su oni započeli rješavanje, ali su pogriješili pri procjeni načina rješavanja zadatka ili uporabom dobre formule, ali s greškom u plus/minus koja ih nije vodila do ispravnog rješenja, a "slijedi grešku" nije bodovano.

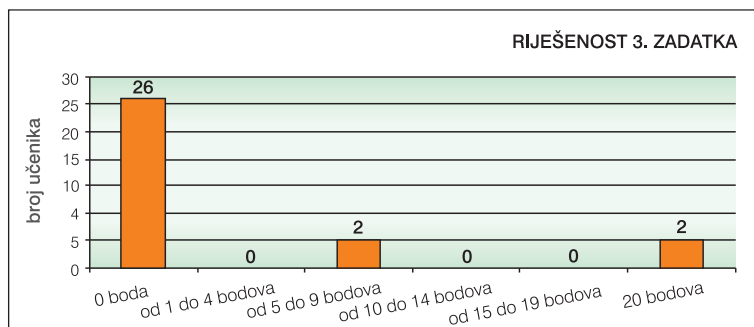
Ovaj je zadatak zapravo vrlo jednostavan ako pro radi "kliker" i mašta (vidi [1]):

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cdot \cos n} &= \frac{\sin[n - (n-1)]}{\cos(n-1) \cdot \cos n} \\ &= \frac{\sin n \cdot \cos(n-1)}{\cos(n-1) \cdot \cos n} - \frac{\cos n \cdot \sin(n-1)}{\cos(n-1) \cdot \cos n} \\ &= \operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n-1). \end{aligned}$$

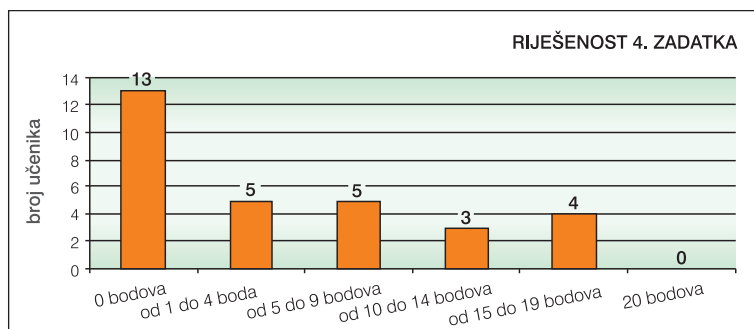
Zadatak 4.

Medusobna udaljenost središta sfera polumjera R i r ($r < R$) jednaka je a ($R - r < a \leq R + r$).

- a) Izrazi obujam V pravilnog kružnog stošca, opisanog oko ovih sfera, u zavisnosti o parametrima a , R i r .



Slika 3.



Slika 4.

- b) Izračunaj volumen stošca ako je $R = 10$, $r = 6$ i $a = 8$.

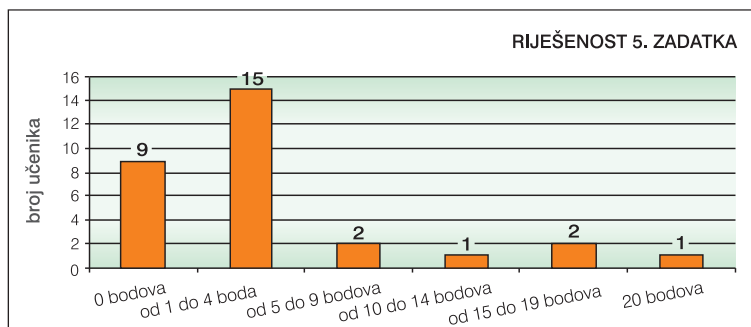
Kao što sve pisane provjere znanja, pa i natjecanja pokazuju, geometrijski su zadaci veliki problem našim učenicima. A i ispravljaču ovog zadatka nije bilo lako. Niti jedan učenik nije osvojio maksimalnih 20 bodova. Dvoje je učenika došlo do konačnog rješenja za volumen u ovisnosti o a , R i r , ali ga nisu sredili do kraja i stoga nisu postigli maksimalne bodove. Važno je napomenuti da se u ovom zadatku bodovala skica, a da znatan broj učenika nije u tome bio uspješan.

Zadatak 5.

Dvije jednake šahovske ploče (8×8 polja) imaju zajedničko središte i jedna potpuno prekriva drugu. Jedna od njih zarotira se oko središta za 45° . Odredi površinu presjeka svih crnih polja jedne ploče sa svim crnim poljima druge ploče ako je površina jednog polja jednaka 1.

Još jedan loše riješen zadatak. Iako je bilo nekoliko dobrih pokušaja samo je jedan učenik uspješno složio šahovske ploče i izračunao površinu poklopljenih crnih polja.

Učenici koji su osvojili do 19 bodova bili su blizu ili su dostigli izraz $\sqrt{2} - 1$ (vidi [1]), ali nisu znali kako ga iskoristiti dalje.



Slika 5.

* * *

Analiza pokazuje sljedeće:

- samo je pet učenika uspješno riješilo po jedan cijeli zadatak;
- učenici koji su osvojili prvo i drugo mjesto jesu učenici koji su jedini riješili treći zadatak (trigonometrijska dosjetka);
- učenik koji je prvi zadatak riješio na trigonometrijski način, najbolje je riješio drugi zadatak (i osvojio 15 bodova) i trećeplasiran je na Državnom natjecanju;
- učenik koji je prvi zadatak rješavao kvadriranjem u ostalim zadacima nije bio tako uspješan;
- učenik koji je jedini ispravno složio šahovske ploče je četvrtoplasirani;
- niti jedan učenik nije preskočio niti jedan zadatak.

Uočeno je da i naši najbolji učenici:

- imaju poteškoća s uvjetima i analizom rješenja (zadatak 1. i 2.);
- imaju poteškoća sa sređivanjem izraza (zadatak 4.);

- pronalaze izazov u logičkim zadacima, ali nailaze na nepremostive prepreke (zadatak 5.);
- imaju poteškoća s prostornom vizualizacijom i percepcijom istog (zadatak 4.);
- rijetko koriste geometrijski pribor, i ono što bi se moglo vidjeti u dobroj slici više se ne vidi (zadatak 4. i 5.);
- trebaju raditi na logičkim zadacima, kreativnosti i iznalaženju različitih načina rješavanja postavljenih zadataka (zadatak 3.).

Nadam se da će ovaj prilog pomoći profesorima u radu u dodatnoj nastavi i Državnom povjerenstvu za Natjecanje iz matematike u sastavljanju zadataka.

LITERATURA

- 1/ Zadatke i rješenja sa svih nivoa Natjecanja možete pronaći na www.azoo.hr → Izvannastavne aktivnosti → Rezultati natjecanja i smotri → Zadaci i rješenja Natjecanja iz matematike 2009.

