

Metodički aspekti abakusa

II. dio



*Ivan Matić, Domagoj Ševerdija, Osijek **

Tijekom stoljeća postojanja, abakus je nalazio svoju primjenu u nastavi matematike i svakodnevnom računanju. Danas je to nekada neizostavno računsko pomagalo ipak nepravedno zanemareno. Namjera nam je izvući ga iz zaborava te поближе upoznati s njim čitatelje MiŠ-a.

Nakon što smo u radu [2] opisali prikazivanje brojeva i provođenje osnovnih računskih operacija na kineskom abakusu, nastavljamo s opisom situacija u kojima se on pokazuje korisnim. Time se želimo dotaknuti i srednjoškolske nastave matematike, ali i nastave informatike i šire. Za dodatna uputstva o korištenju abakusa, upućujemo čitatelje još i na radove [1] i [3].

Abakus nekad i danas

Svakodnevno smo bombardirani različitim reklamama – na njih nailazimo u novinama, postale su sastavni dio radio-programa, šareno tiskane reklame pune nam poštanske sandučiće, dok nam skupno osmišljene reklame uspješno presijecaju gotovo svaki film ili tv-seriju. U posljednje se vrijeme često prikazuje takva reklama, radnja koje se zbiva u ma-

loj kineskoj prodavaonici antikviteta. Nakon što se kupci, inače uglađeni ljudi koji za život zarađuju baveći se sumnjivim poslovima, natrpaju različitim artiklima, na trgovcu je, starom Kinezu, da im ispostavi račun. Kako bi pozbrajao cijene odabranih artikala, on se ne koristi blagajnom ni optičkim čitačem bar-kodova na proizvodima. Ne, već on jednostavno i brzo ukupni iznos računa određuje na abakusu. Naravno, reklama nije savršena pa u njoj stari Kinez koristi ruski abakus (umjesto očekivanog kineskog), no poenta je jasna i upečatljiva – uporaba abakusa i dalje je prisutna u brojnim manjim prodavaonicama diljem Kine, Rusije (pogotovo u njenom azijskom dijelu) i kineskim četvrtima Sjeverne Amerike.

Iako je abakus ispao iz korištenja u svakodnevnom računanju, gdje je evolucija računala preuzela glavnu riječ, ostao je dostatno pomagalo u računanju u različitim prigodama – operacijama s prirodnim

*Autori su asistenti na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.



brojevima ili s decimalnim brojevima s manjim brojem decimalnih mjesta, kao što je npr. ispostavlja-nje računa u trgovinama.

Naravno da je napredak računala i kalkulatora imao presudnu ulogu pri razvoju računskih pomagala. Pridonio je lakšem, bržem i preciznijem izračunavanju u situacijama kada je to potrebno. Osim toga, više nije potrebno razmišljati o tehnikama računanja jer su sada u potpunosti podređene korisničkim potrebama.

Osim toga, korisnička su sučelja svedena na jednostavan i prigodan nivo, dok se rezultati računskih operacija mogu odrediti s proizvoljnom traženom točnošću. No, nemojmo umanjiti važnost abakusa jer ipak je kalkulator baziran na principu istovjetnom onomu koji se koristi prilikom računanja na abakusu. Također, nemojte pomisliti kako se na abakusu ne mogu izvršavati i precizni računi – naime, u Japanu postoji nekoliko stupnjeva majstora (master) abakusa, s obzirom na broj decimalnih mjesta na koji su sposobni računati koristeći abakus. Ipak, abakus nije pogodan za rad s nekim funkcijama koje su česte u strojarstvu, elektrotehnici, građevinarstvu, brodogradnji... Među takvima se izdvajaju trigonometrijske, logaritamske i eksponencijalne funkcije, čija je posebnost u tome što ne postoji ni dovoljno precizan algoritam za rad s njima na papiru te time ni na abakusu.

No, iako je prirodna evolucija računala svakako izgurala abakus iz uporabe pri obavljanju velikih proračuna, još uvijek je prisutna raznovrsna korist od abakusa u današnjem školstvu te time i potreba za njegovim korištenjem.

Za razliku od kalkulatora i računala, abakus razvija sposobnosti računanja te može odigrati važnu ulogu pri razumijevanju aritmetike. Upravo je iz navedenog razloga i dalje u uporabi u školama diljem Japana, Kine i Rusije. I dok se svi možemo složiti kako u bespućima Kine i azijskome dijelu Rusije postoje brojne ruralne siromašne sredine gdje u školskim prostorijama nema ni struje (a kamoli računala), svima je jasno da nigdje u Japanu situacija nije takva. U dalekoj, visokorazvijenoj Zemlji izlazećeg sunca modernizacija se uvukla u gotovo sve pore društva, noseći sa sobom automatizaciju i informatizaciju gdje god je to moguće i ostvarivo. Ali ne i u početke školovanja. Iako svako japansko kućanstvo ima računala, uporaba istoga ne nalazi se u nastavnom programu najnižih razreda, već uporaba (naravno, japanskog) abakusa. Iz kojeg razloga? Obrazovnog, prije svega. Naučiti djecu manipulaciji s brojevima, prikazu brojeva, stvaranju jasnog dojma o veličini prirodnih brojeva i mogućnostima baratanja s njima te snalaženju na malom prostoru koji nudi abakus, prostoru za zapis brojeva koji je mnogo skućeniji od onoga koji nudi list papira.

Tek nakon usvajanja rada na abakusu, prilikom kojeg su učenici na vlastitoj koži osjetili svu težinu, raznovrsnost i moć računanja popraćenu brojnim sitnim zamkama, dovodi ih se pred gotove računalne programe i sučelja. Osim razvijanja dječje kreativnosti i pravilnoga pristupa provođenju računa, time ih se uči i cijeniti gotove programe koji potrebni postupak provode umjesto njih.

Abakus ne možemo u današnje vrijeme ograničiti samo na njegovu edukativnu svrhu. Postoji i situacija gdje je njegova forma i konstrukcija pogodnija od bilo koje druge.

Jeste li se ikada zapitali kako slijepi uče aritmetiku? Kako uče zbrajati i oduzimati? Poznato je da čitaju koristeći Brailleovu abecedu, gdje prelazeći vršcima prstiju preko slova modeliranih od točkica spajaju riječi iz kojih zatim nastaju rečenice, no računanje je nešto drugo. Iako su brojevi zapisani kao niz znamenki, gotovo nijednu od osnovnih računskih operacija nije moguće provesti u takvom zapisu. Zamislite samo dijeljenje višeznamenkastih brojeva, koje se sastoji od određivanja nekoliko parcijalnih umnožaka, koje zatim treba potpisati na

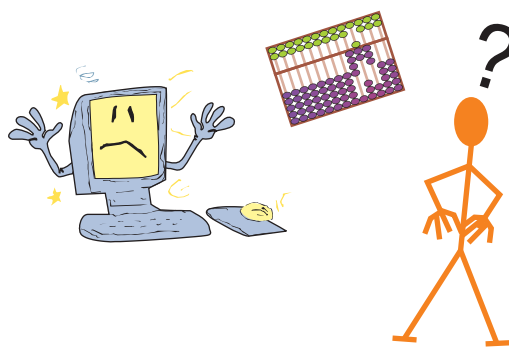
točno određeno mjesto i oduzeti. Kako bi netko slijep mogao sve to popratiti? Ali, osnovna ideja je jasna – slijepi se prilikom čitanja koriste osjetom dodira te se njime moraju koristiti i prilikom računanja. Jedini problem je u tome što su brojevi ipak na određen način kompleksniji od slova, i u manipulaciji i u zapisu. Slijepima je vrlo teško čitati zapis nekog računa na papiru jer tada brojevi nisu zapisani slijedno, već određenim redom dolaze i potpisani s donje, pa se tek zatim nastavlja s desne strane. Abakus upravo takav problem eliminira jer na njemu znamenke uvijek dolaze zapisane redom, jedna za drugom – nema prostora na kojem bi se nešto “potpisalo”, takav se broj odmah dodaje ili oduzima. A kako ne bi došlo do zbrke i moguće zabune, među različitim brojevima korištenim u računu ostavlja se po jedan slobodan stupac. Pogodnosti koje pruža abakus široko su prihvaćene u poučavanju slijepih aritmetici i razvijanju njihova prvog dojma o brojevima. Nakon toga, ipak čitav postupak učenja dalje ide mnogo lakše.

Računske operacije i slijepo računanje

Svjesni smo toga da se velik dio matematike uči na posve šablonski način, počevši od osnovne i srednje škole pa sve do fakulteta. Unatoč stalnim pokušajima približavanja matematike učenicima i studentima na problemski ili projektni način, čime se od njih traži i drukčiji pristup rješavanju matematičkih problema, učenje šablonskih postupaka uvijek je prisutno. Ipak brojni postupci pristupa nekom računu čine neizostavan dio nastave matematike, od prvih susreta učenika s tablicom množenja, preko rješavanja trigonometrijskih jednadžbi pa sve do fakultetskog gradiva.

Naime, svi kolegiji i predmeti vezani uz matematiku imaju u sebi i nešto šablonski. U tome nema ništa loše, svaki postupak koji možemo podcrtati kao tipski ili šablonski direktan je proizvod matematičke teorije te svakako zaslužuje biti iznesen i obrađen. Čak i tijekom studija matematike, prilikom auditornih vježbi, uvijek se obrađuju pristupi rješavanju pojedinih tipova zadataka te oni obično

predstavljaju i gradivo koje će studenti najprije usvojiti. Prilikom pripremanja za ispite svi će uredno pogledati kakvi se zadaci na ispitu pojavljuju te na koji se način oni rješavaju. Naravno, od određenog broja učenika i studenata ne treba ni očekivati da svladaju i preostalo gradivo, no upravo iz tih se razloga uvijek cilja da fond tehničkih postupaka zauzme dovoljan dio gradiva.



Kakva je prava veza spomenutih tehničkih postupaka računanja uklopljenih u standardnu matematiku i abakusa? Kako smo već i ranije naglasili, abakus nije naprava koja nadilazi svakodnevnu matematiku, naprotiv – abakus je uključen u nju te mu je osnovna namjena služiti kao pomoć i potpora. Iz tog se razloga i računanje na abakusu temelji na najstandardnijim računskim tehnikama, slijedeći jedan od najraširenijih pristupa u znanosti – primjenu već razvijenih metoda na novu situaciju. Prema tome, dio sveprisutnih tehnika svakako može biti pogodan prilagodbi i prenošenju za rad na abakusu. Osim toga, zbog svoje konstrukcije i ograničenosti broja stupaca, abakus nije uvijek pogodan za sasvim direktno prenošenje provođenja računskih operacija s papira te time razvija i sposobnost prilagodbe naučenih tehnika. Iako računi i dalje ostaju šablonski, zahtijevaju i drukčiji pristup. Time se ne mijenja nastavno gradivo jer ukupna količina tehničkih postupaka ostaje nepromijenjena, ali pristup u njegovu izlaganju poprima drugu dimenziju, blago izlazeći iz standardnih šablonskih okvira.

Pri nekim se računima često koristimo znanjem aritmetike, posežući za raznim lukavstvima i trikovima koji skraćuju ili olakšavaju račun. Na primjer, želimo

li prirodan broj n pomnožiti s 999, to ćemo izvesti tako da prvo n pomnožimo s 1000 (dodajući mu samo tri nule zdesna), a zatim od dobivenog umnoška oduzmemo n . No, abakus je ponajprije zamišljen kao pomagalo u računanju svima koji o aritmetici ne znaju ništa ili gotovo ništa, dakle primjenjiv i onima koji o brojevima nemaju nikakav jasan dojam. Zato prilikom računanja na abakusu ne postoji preskakanje koraka ni pomicanje zrnaca unaprijed, što možda i usporava postupak, ali umanjuje mogućnost pogreške.

Pogledamo li neki (mrvicu kompliciraniji) račun koji je na papiru proveo netko drugi, brojevi korišteni pri tom postupku izgledat će nam kao nabacan skup znamenki. Kako bismo ostvarili poveznicu među tim znamenkama, često je nužno proći kroz čitav već provedeni postupak. Slično tomu, pokušavamo li napamet provesti računski postupak koji se sastoji od više koraka, teško je precizno pratiti izmjene brojeva i tijekom toga smisljeno položiti sve korištene operacije. Razmišljanje postaje mnogo lakše ako si možemo problem predočiti na slikovit način, koji je svakako daleko pogodniji od pokušaja zamišljanja uzastopnih koraka stavljenih na papir. I tu uskače abakus jer se nakon određenog vremena rada na njemu javlja jasna slikovita predodžba računskog postupka. Osim toga, zamišljanje pomicanja zrnaca na stupcima i trenutačno prikazane pozicije na abakusu daleko su lakše izvedivi nego "slijepo" zapisivanje brojeva na papir. I u takvom razmišljanju mogu od velike koristi biti sitna lukavstva, no ona nisu nužna. A provođenje svih koraka redom će ukloniti svaku nesigurnost.

Upravo iz navedenih razloga, mnogi stručnjaci u radu na abakusu usavršeni su i u mentalnom (slijepom) računanju, koje u Japanu zovu *anzan* (ili *ansuān* na mandarinskom). Mentalno se računanje provodi vizualizacijom abakusa (svejedno kojega jer se računanje uvijek bazira na istim principima) te rješavanjem problema bez pokušaja određivanja krajnjeg rezultata unaprijed. Primijetimo kako je takav postupak ponovno svojstven upravo ljudima bez razvijenog znanja aritmetike jer bi se u suprotnom obično unaprijed pogađao rezultat. Mentalno računanje iznimno je popularno u azijskim zemljama te je jedan od razloga iz kojeg tamošnji roditelji

i dalje forsiraju poučavanje djece radu na abakusima. Takva poučavanja obavljaju posebno obučeni učitelji sorobana i suanpana (japanskog i kineskog abakusa). Umijeće računanja na ovim abakusima izrazito je pogodno za prenošenje u mentalno računanje na vrlo visokom nivou.

Brojevni sustavi

Dosada navedene primjene abakusa služe za stjecanje jasnijeg dojma o prirodnim brojevima i za lakše usvajanje računskih operacija. Navedene primjene ipak pripadaju osnovnoj razini nastave matematike. Može li se abakus primijeniti i u višoj razini? Postoji li i na tom stupnju gradivo koje bi dijelu učenika moglo biti apstraktno, unatoč pomnije biranoj dobi slušača? Postoji li istovremena primjena i u nastavi informatike?

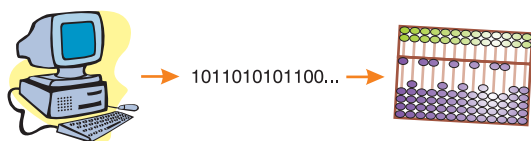
U tu svrhu valja se zapitati – može li abakus biti elegantno sredstvo i za rad u drugim brojevnim sustavima? U ovom poglavlju pokušat ćemo dati odgovor na to.

Već na prvi pogled uočavamo kako abakus može prikazivati brojevne sustave s bazom ne većom od 16 jer je 16 broj koji možemo zapisati korištenjem svih zrnaca na pojedinom stupcu. No, određeni problemi nastaju unutar pojedinih baza, želimo li nakon prikaza brojeva u toj bazi omogućiti i provođenje računskih operacija. Za takvo korištenje abakusa ipak je potrebno uvesti i dodatne prilagodbe. Sjetimo se drugog poglavlja rada [2] i opisa provođenja osnovnih računskih operacija na abakusu. Naime, po jedno zrnce iz gornjeg i donjeg polja (zrnca najbliža okviru abakusa) smatrali smo takozvanim kontrolnim zrcima, tj. onima koja prilikom računanja ne koristimo. Razlog takvog odabira zrnaca leži u tome što nemamo potrebu za prikazivanjem znamenki većih od 9. Najveća raspoloživa znamenka ovisi o bazi brojevnog sustava, preciznije, za jedan je manja od baze. Prema tome, prilikom rada na abakusu u određenoj je bazi potrebno najprije pomno odabrati zrnca koja smijemo koristiti, no nagrada za takvu prilagodbu jest vizualni pristup računanju i izostanak potrebe za uvođenjem (možda ponekad zbunjujućih) oznaka za znamenke veće od 9.

Pogledajmo kako bi navedene situacije izgledale u različitim bazama, mahom zastupljenima u nastavi informatike.

Brojevi sustavi s bazom manjom ili jednakom od 10

Binarni brojevni sustav. Jedan od najpoznatijih brojevnih sustava nakon dekadskog zasigurno je binarni. Najveću primjenu nalazi u elektronici i kao nastavna tema uključen je u nastavu informatike. Većina učenika upoznaje pretvorbu iz dekadskog u binarni brojevni sustav i uči aritmetičke operacije s binarnim brojevima.



Kako prikazati binarne brojeve na abakusu? Sigurno znamo da nam je potrebno najviše jedno zrnice po stupcu da zapišemo 1 i prazan stupac da zapišemo 0. Kontrolna zrnca su tada preostala četiri zrnca na donjem dijelu i oba zrnca iz gornjeg dijela. Prijenos i posudba se onda na prirodan način ostvaruju i u ovom brojevnom sustavu, što rezultira lakom primjenom računskih operacija s binarnim brojevima na abakusu.

Oktalni brojevni sustav. Oktalni brojevni sustav također nalazi primjene u informatici, pretvorba brojeva iz binarnog u oktalni sustav i obrnuto vrlo je laka i specifična. Baza sustava je 8 te zato na svakom stupcu moramo moći prikazati znamenke $\{0, 1, \dots, 7\}$. Kontrolna zrnca odabiremo na sljedeći način: ako prikazujemo brojeve manje od 5, imamo jedno kontrolno zrnice na donjem dijelu abakusa, a ako prikazujemo broj veći od 5 (i, naravno, manji od 8), koristimo jedno zrnice iz gornjeg i najviše 2 iz donjeg polja. U tom slučaju kontrolna su zrnca jedno u gornjem polju i tri u donjem polju. Posebnu pozornost treba obratiti na stanje kontrolnih stupaca prilikom zbrajanja ili oduzimanja oktalnih brojeva i na težinu prijenosa.

Općenito, prikazi brojeva u brojevnim sustavima i pripadne aritmetičke operacije mogu se prirodno definirati na abakusu s posebnom pozornošću prilikom odabira kontrolnih zrnaca (sjetimo se, kontrolna zrnca govore nam kada moramo raditi prijenos u gornje polje ili na drugi stupac). Isto tako, treba obratiti pozornost koju vrijednost podrazumijeva prijenosi i posudbe u određenoj bazi. Osnovni problem leži u tome što odabir zrnaca koja ne smijemo koristiti nije ni jedinstven ni fiksni, već ovisi o znamenki koju trenutno prikazujemo i s kojom računamo.

Brojevi sustavi s bazom većom od 10

Radimo li u takvom brojevnom sustavu, suočeni smo s pojavljivanjem znamenki kojih nema u dekadskom sustavu. Namjesto tih je znamenki zato uobičajeno korištenje slova abecede. Aritmetičke operacije zbog toga za učenike mogu biti zbunjujuće. No, abakus ne poznaje nikakve znamenke, njegovi stupci priznaju jedino nanizana zrnca. A s pomoću tih se zrnaca na svakom stupcu mogu zapisati i brojevi veći od 9. Time se može izbjeći direktno petljanje sa slovima tijekom računa te mu pristupiti na uobičajen način. Netom navedeni problem ponovno se javlja – koja zrnca prilikom računa nećemo koristiti? Naime, svakako moramo prikazati broj 9, što znači da u donjem polju može biti zabranjeno samo jedno zrnice. Prikazujemo li znamenku veću od 9, ostavimo jedno zrnice iz donjeg polja netaknuto i koristimo oba zrnca iz gornjeg polja. Ali, spustimo li oba zrnca iz gornjeg polja, moramo biti oprezni s onim što se događa u donjem. Na primjer, prilikom rada u bazi 13 nisu nam potrebne znamenke veće od 12, te se na stupcu na kojem spustimo oba zrnca iz gornjeg polja broj zrnaca iz donjeg polja koja ne koristimo povećava na 3.

Drugim riječima, računanje u nekim brojevnim sustavima uvijek zahtijeva dodatni oprez – ili u zapisu znamenki s pomoću slova, ili u prijelazu preko baze sustava, ili u promjeni broja kontrolnih zrnaca koja ne koristimo, ovisno radimo li na papiru ili na abakusu.

No, prokomentirajmo i najpoznatiji primjer, koji je vjerojatno u vezi s brojem zrnaca na kineskom abakusu:

Heksadecimalni brojevni sustav. Još jedan brojevni sustav koji je naširoko poznat te koristi znamenke od kojih se neke zamjenjuju slovima. Najprirodnije je znamenku *A* zapisati s pomoću dvaju zrnaca iz gornjeg polja. Jedino što korisnik treba znati jest valjano provesti aritmetičke operacije na abakusu za heksadecimalni sustav. Rezultat koji stoji zapisan na abakusu vrlo se lako napiše u dogovornom obliku na papir. U heksadecimalnom brojevnom sustavu nemamo kontrolnih zrnaca jer moramo iskoristiti sva zrnca po stupcu.

Možemo zaključiti da abakus na jednostavan način (uz malu prilagodbu) može poslužiti kao sredstvo na kojem će se vršiti aritmetičke operacije u različitim brojevnim sustavima te na taj način može pomoći učenicima pri manipuliranju s operacijama koje im na prvi pogled "nisu prirodne". Osnovna prednost abakusa ponovno je u zornosti koju pruža. Naime, pri računanju na abakusu u svakom je trenutku potpuno očito koliko nam je zrnaca preostalo na raspolaganju. Nasuprot tomu, prilikom računanja na papiru prijelaz je preko baze često učenicima neprirodan i apstraktan.

Radom na abakusu u proizvoljnoj bazi manjoj od 17, uz prethodni odabir kontrolnih zrnaca, moguće je lako i u kratkom vremenu doći do automatizma u vršenju traženih računskih operacija. Unutar tog automatizma krije se i prirodno prenošenje aritmetike dekadskog sustava na druge brojevnih sustave.

Moramo isto tako napomenuti da je abakus vrlo neupotrebljiv kao pomagalo pri pretvaranju iz jednih brojevnih sustava u druge, zbog ograničenosti u broju stupaca. Vjerujemo kako bi neke modifikacije abakusa mogle poslužiti kao dobro sredstvo učenju pretvaranja brojeva iz jedne baze u drugu.

Završne napomene

Kroz nekoliko tema, ukratko obrađenih u prethodnim poglavljima, naveli smo samo neke od načina uporabe abakusa i njegove primjenjivosti u različitim obrazovnim skupinama i šire. Ipak se abakus održao kroz brojna stoljeća kao vrhunsko pomagalo prilikom računanja i učenja, koje je tek nedavno zamijenjeno računalima. Već sama ta činjenica ide

mu u prilog te daje i blagu preporuku za korištenje u nastavi.

Sve navedene teme samo su prijedlozi, uvijek podložni promjenama i prilagodbama prema želji i zainteresiranosti učenika. Moramo istaknuti kako upoznavanje s abakusom predstavlja određen izazov i učenicima i nastavnicima. Riječ je o jednoj od onih spravica za koje su svi čuli, koja je zastupljena diljem svijeta, ali kojom se ipak rijetki znaju pravilno koristiti i vide jasan cilj toga korištenja. Što je možda i najvažnije, abakus pruža mogućnosti ostvarivanja nastavnih ciljeva kroz kreativnu igru i zabavu, a svakako takvo što ne bi trebalo promatrati podcjenjivački.



Želimo vam ugodno druženje s različitim varijantama abakusa!

LITERATURA

- 1/ Ž. Hanjš: *Kako se nekad računalo. Kineski abak, Matka*, br. 10, 67–70.
- 2/ I. Matić, D. Ševerdija: *Metodički aspekti abakusa I*, Matematika i Škola 52.
- 3/ I. Matić, D. Ševerdija, S. Škorvaga: *Numerička ograničenja kineskog abakusa*, Osječki matematički list (prihvaćeno za objavljivanje).