

Kompleksni brojevi u GeoGebri

Šime Šuljić, Pazin

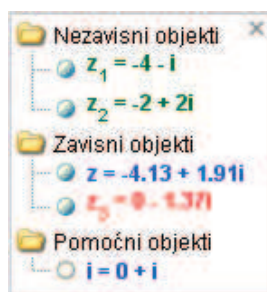
S kompleksnim se brojevima u srednjoškolskim programima matematike susrećemo u drugom i četvrtom razredu. Dohvaćamo se pritom i prikaza kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini. Može li *Geogebra* koordinatni sustav, odnosno njen grafički prikaz, poslužiti za prikaz kompleksnih brojeva?



Može li interpretirati računske operacije s tim brojevima na način na koji se definiraju računske operacije s kompleksnim brojevima? Odgovor je potvrđan, štoviše vrlo složene izračune možete izvesti veoma brzo i pouzdano uz istovremenu predodžbu rezultata i međukoraka.

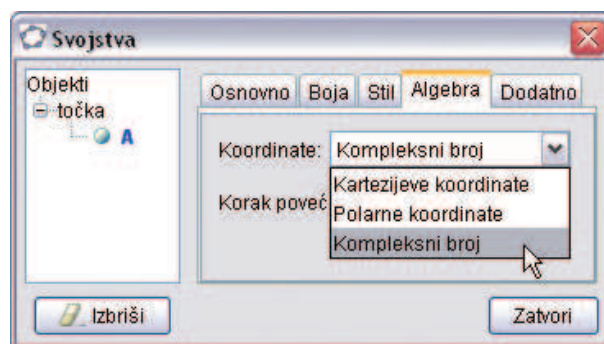
“Paljenje” kompleksne ravnine

GeoGebra ne podržava kompleksne brojeve izravno, ali vi možete koristiti točke koje će simulirati operacije s kompleksnim brojevima.



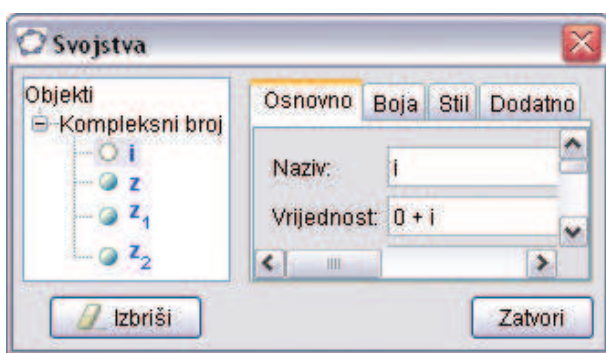
Primjer. Upišete li kompleksni broj $z_1 = -4 - i$ u traku za unos, dobit ćete točku $(-4, 1)$ u grafičkom prikazu. U algebarskom prozoru koordinate ove točke bit će prikazane kao $-4 - i$.

Napomena. Nakon prvog definiranog kompleksnog broja program će automatski rezervirati varijablu i za uređeni par $(0, 1)$, odnosno kompleksni broj $0 + 1i$ koji neće biti prikazan, a njegov će se algebarski zapis naći u mapi *Pomoćni objekti*.



Pretvaranje već konstruiranih točaka u kompleksne brojeve

Ako već imate nacrtanu točku koordinatnog sustava i u *algebarskom prikazu* vidite njene Kartezijeve koordinate, možete u bilo kojem trenutku prijeći na algebarski zapis kompleksnog broja. Otvorite dijaloški okvir *Svojstva* za točku i odaberite "Kompleksni broj" iz padajućeg izbornika "Koordinate" na kartici *Algebra*.



Polarne koordinate

Primijetite na slici da u padajućem izborniku imamo na raspolaganju i polarne koordinate za točke. *GeoGebra* razlikuje polarne koordinate od Kartezijevih po 'točka zarezu' među koordinatama. To značajno može olakšati unos kompleksnih brojeva. Na primjer, kompleksni broj $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ možemo zadati polarnim koordinatama $(1; \pi/4)$ ili $(1; 45^\circ)$, umjesto da upisujemo $\text{sqrt}(2)/2 + \text{sqrt}(2)/2 i$. Na kartici *Algebra* dijaloškog okvira *Svojstva* potom prebacite polarne koordinate točke u kompleksni broj.

Računske operacije

Primjeri zbrajanja i oduzimanja

- $(2 + 1i) + (1 - 2i)$ daje kompleksni broj $3 - 1i$.
- $(2 + 1i) - (1 - 2i)$ daje kompleksni broj $1 + 3i$.

GeoGebra u izrazima prepoznaje realne i kompleksne brojeve.

- $3 + (4 + 5i)$ daje kompleksni broj $7 + 5i$.
- $3 - (4 + 5i)$ daje kompleksni broj $-1 - 5i$.

Primjeri množenja i dijeljenja

- $(2 + 1i)(1 - 2i)$ ili $(2 + 1i) * (1 - 2i)$ daje kompleksni broj $4 - 3i$.
- $(2 + 1i)/(1 - 2i)$ daje kompleksni broj $0 + 1i$.
- $3/(0 + 1i)$ daje kompleksni broj $0 - 3i$.
- $3 * (1 + 2i)$ daje kompleksni broj $3 - 6i$.

Napomena: Uobičajeno množenje $(2, 1) * (1, -2)$ daje skalarni umnožak dviju točaka (dvaju vektora).

Potenciranje kompleksnih brojeva

- $(1 + 2i)^2$ daje kompleksni broj $-3 + 4i$.
- i^{100} daje broj $1 + 0i$.
- $(\text{sqrt}(2)/2 + \text{sqrt}(2)/2 i)^4$ daje broj $-1 + 0i$.

Modul kompleksnog broja

Modul kompleksnog broja dobije se funkcijom `abs( )`.

- `abs(sqrt(2)/2 + sqrt(2)/2 i)` daje vrijednost 1.

Složeniji primjeri

1. Izračunajte $\frac{z^6 + |z| + i^{-111}}{|z^2| + i^{111}}$, gdje je:

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Upišite u traku za unos: `z = -sqrt(3)/2 + 1/2 i` potom: `(z^6 + abs(z) + i^(-111)) / ((abs(z))^2 + i^111)`. *GeoGebra* daje rezultat: $-0.5 + 0.5i$.

2. Izračunajte $\left[\sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \right]^{42}$.

Upišite: `(cbrt(2)(cos(5pi/12) + i sin(5pi/12)))^42`.

Rezultat je broj $z = 0 - 16384i$.

Skup točaka kompleksne ravnine

Često u našim srednjoškolskim zbirkama zadataka, na kraju cjeline kompleksnih brojeva, nailazimo na zadatke s određivanjem skupa brojeva u Gaussovoj ravnini koji zadovoljavaju određeni uvjet. Zadatak na koji sam naišao prateći jedan od hrvatskih web foruma sličan je tim zadacima, a teži utoliko što nije zadan s točno određenim brojevima.

Zadatak. Odredi skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetom $\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2} = 0$.

Algebarsko rješenje

Uzmemo li da je $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$, onda nakon uvrštavanja dobivamo:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \frac{(x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_2)}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}i.$$

Kako je $z \neq z_2$, slijedi:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Ovu jednakost možemo pisati i u obliku:

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2.$$

Desna strana te jednakosti zapravo je kvadrat polovine udaljenosti z_1 i z_2 . Traženi skup točaka je kružnica sa središtem u točki:

$$z_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}i,$$

s promjerom koji je udaljenost z_1 i z_2 , ali bez točke z_2 .

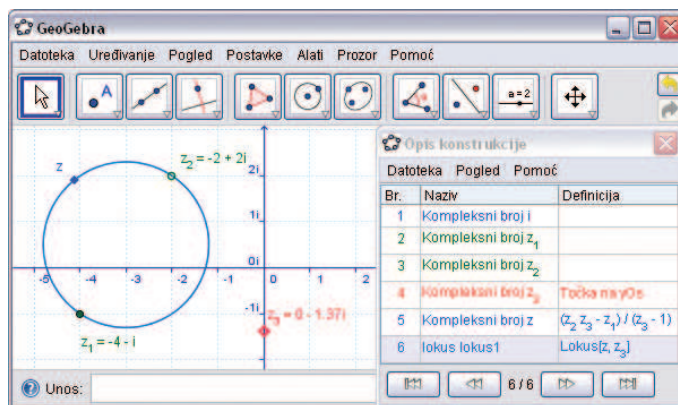
Rješenje uz pomoć GeoGebre

Tijekom rješavanja zadatka na forumu u jednom je trenutku došlo do pogrešne interpretacije dobivenog ispravnog algebarskog rješenja, a s druge

strane je učenik koji je postavio zadatak zamolio da mu se pomogne problem riješiti u računalnom programu dinamične geometrije.

Učinio mi se to krupan zalogaj na prvi pogled ali, kako ćete se i sami uvjeriti, uz malo prilagodbe "filozofiji" računalnog programa možemo dobiti veoma jednostavno i elegantno rješenje.

Na priloženoj slici, iz otvorenog programskog prozora *Opis konstrukcije*, vidi se da je riječ o svega šest koraka konstrukcije. Zapravo o pet koraka jer definiranje točke $(0, 1)$ kao broja i izvrši program automatski dok korisnik stane zadavati kompleksne brojeve. Dakle, ova je konstrukcija izvedena na sljedeći način:



- 1) Zadan je kompleksni broj z_1 kao nezavisna točka, odnosno točka koja se slobodno može povlačiti po koordinatnom sustavu.
- 2) Na isti je način zadan kompleksni broj z_2 .
- 3) Broj z treba predstavljati skup svih brojeva koji moraju ispunjavati zadani uvjet pa njega nećemo konstruirati kao nezavisan objekt već kao zavisan. Osnovni je problem kako postaviti uvjet da:

$$\operatorname{Re} \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

bude jednak nuli. Izraz $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ zapravo je kompleksni broj koji označimo kao z_3 . Ako je realni dio tog broja jednak nuli, onda je on u kompleksnoj ravnini smješten na imaginarnoj osi pa

stoga taj broj zadamo naredbom kroz traku za unos: $z_3 = \text{Točka}[y0s]$.

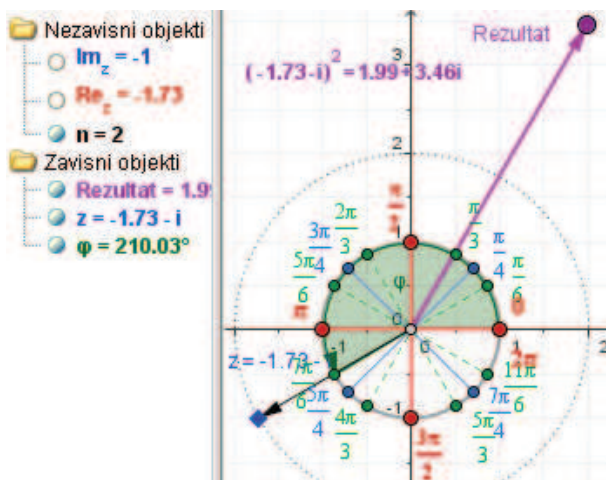
- 4) Iz relacije $z_3 = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ izrazimo z i taj broj kroz traku za unos zadamo naredbom $z = (z_2 \cdot z_3 - z_1) / (z_3 - 1)$.

- 5) Povlačimo li sada točku z_3 po osi ordinata možemo uočiti da točka z izvodi kružno gibanje. Bit ćemo sigurniji u to da je riječ o kružnici ako zadamo naredbu **Lokus**[z , z_3] kojom ćemo dobiti upravo skup svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju postavljeni uvjet zadatka.

Iz dobivenog *lokusa* vidi se da je riječ o kružnici, čiji je promjer dužina s rubnim točkama z_1 , z_2 . Njezino polovište središte je kružnice. Do jednadžbe te kružnice možemo doći naredbom **k** = **Kružnica**[z , z_1 , z_2], a do koordinata središta naredbom **S** = **Središte**[**k**].

Potenciranje kompleksnih brojeva

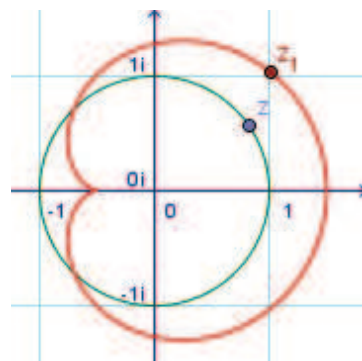
Ova je slika preuzeta s *Riznice matematičkih apleta* (<http://apleti.normala.hr>), a predstavlja alat u kojem korisnik može izračunati potenciju kompleksnog broja, uz predodžbu njegova modula i argumenta u trigonometrijskom zapisu broja.



Dovoljno je da korisnik izmijeni realni i imaginarni dio broja te zada eksponent potencije. Cijeli postupak određivanja rezultata krajnje je jednostavan. Dvoklikom na aplet na toj stranici možete preuzeti datoteku na svoje računalo i zaviriti u izbornik *Opis konstrukcije*.

Transformacije u kompleksnoj ravnini

Neke poznate figure, koje inače možemo opisati mehaničkim gibanjem točaka u ravnini ili ih zadati jednadžbama, u kompleksnoj ravnini možemo dobiti krajnje jednostavnim transformacijama. Tako **kardioidu** dobijemo preslikavanjem kružnice polumjera jedan po formuli $\frac{1}{2}z^2 + z$. U *GeoGebri* točku na kružnici preslikamo po toj formuli, a potom koristimo naredbu *Lokus*.



Transformacije kružnice

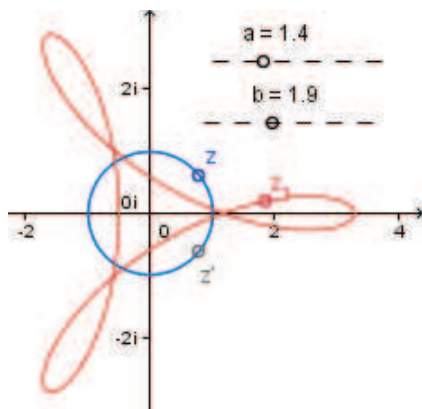
U jednom od ranijih brojeva *Miš-a* pokazali smo kakve sve oblike možemo dobiti naredbom:

$$\text{Krivulja}[a \cos(2t) + b \cos(t), a \sin(2t) - b \sin(t), t, 0, 2\pi]$$

mijenjajući parametre a i b . Te zanimljive oblike možemo postići i u kompleksnoj ravnini. Neka je z točka na kružnici i z' konjugirani broj broja z .

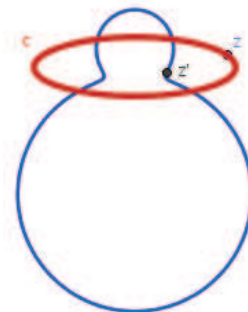
Definirajmo broj $z_1 = az^2 + bz'$, gdje su a i b ranije definirani parametri u intervalu od 0 do 5. Naredbom **Lokus**[z_1 , z] dobijemo krivulju kakvu

vidite na slici i razne druge oblike kad se mijenjaju vrijednosti parametara.



Igra sa savitljivom tikvicom

Pogledajte sliku 'tikvice' i elipse. Može li se tikvica provući kroz elipsu? Da, može, jer sve se odvija u kompleksnoj ravni i tikvica se na vrlo zanimljiv način izobličuje kada mijenjate koeficijente u jednadžbi elipse.



Ova je tikvica zapravo skup točaka koji dobijemo kada točke elipse transformiramo po formuli: $z' = \frac{20z}{|z|^2}$. Evo zapisa cijele konstrukcije radene prema ideji kolege Marca Rouxa (www.apmep.asso.fr). Ugodna zabava!

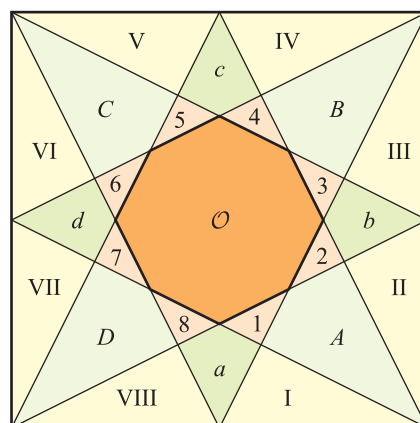
Br.	Naziv	Naredba	Vrijednost
1	broj a		a = 8
2	broj b		b = 2.3
3	broj p		p = 0
4	broj q		q = 1.2
5	elipsa c	$(x - p)^2/a^2 + (y - q)^2/b^2 = 1$	c: $0.03x^2 + 0.38y^2 - 0.91y = 1.46$
6	Kompleksni broj z	Točka[c]	z = $7.34 + 2.11i$
7	Kompleksni broj i		i = $0 + i$
8	Kompleksni broj z'	$20z / \text{abs}(z)^2$	z' = $2.52 + 0.72i$
9	lokus tikvica	Lokus[z', z]	tikvica

PRAVILAN OSMEROKUT U KVADRATU

PODACI ZA KONSTRUKCIJU. Svaki se vrh zadanog kvadrata spoji sa polovištima nesusjednih stranica (vidi sliku).

PROBLEM 1. Dokaži da se opisanom konstrukcijom proizvodi dvadesetipetodijelni rastav zadanog kvadrata na sljedeće likove rastavnice: jedan središnji pravilan osmerokut, a oko njega osam sukladnih malih pravokutnih trokuta 1-8, osam sukladnih većih pravokutnih trokuta I – VIII, četiri sukladna manja dvopravokutna deltoida $a - d$ i četiri sukladna veća dvopravokutna deltoida $A - D$.

PROBLEM 2. Izračunaj površinu $\mathcal{O}(q)$ pravilnog osmerokuta $ABCD$ ovisno o duljini q stranice zadanog kvadrata. Izračunaj površine i ostalih likova rastavnice: pravokutnih trokuta $1(q)$ i $I(q)$ te dvopravokutnih deltoida $a(q)$ i $A(q)$.



Priradio: Kajetan Šeper