

Esej iz matematike



Ivanka Matešić, Vrbovsko

U trećem razredu opće Gimnazije Bernardina Frankopana u Ogulinu zadala sam učenicima malo drukčiju domaću zadaću iz matematike: napisati esej o nekoj od krivulja koje smo dotad obradili, a prema vlastitu izboru mogli su se odlučiti za temu kružnice, elipse, hiperbole ili parabole.

U našem je radu, dakako, uobičajeno da se znanje učenika u matematici provjerava rješavanjem zadataka, te se i domaća zadaća zadaje kao skup postavljenih zadataka koje treba riješiti matematičkim putem. Potrebno je stoga objasniti (i opravdati) ovaj, u matematici neobičan, odabir domaće zadaće očekivane najčešće u društveno-humanističkim predmetima. Najvažniji razlog koji me naveo na zadavanje esejskoga tipa zadaće bila je cjelovitost zahvaćanja teme, što je pristup koji se podrazumijeva pri pisanju eseja. Da bi se sastavio esej, potrebno je, dakle, dovoljno dobro poznavati temu, tj. autor mora biti informiran o temi ne samo na razini definicije i poznavanja terminologije, već mora temu zahvatiti šire kako bi o njoj mogao sastaviti duži tekst. Esaj je, nadalje, vrsta provjere znanja pri kojoj učenik nije vođen nastavnikovim postavljanjem pitanja i potpitanja, nego je prepušten sebi, tj. svojem znanju i samostalnom istraživanju. Dakle učenik sam treba strukturirati tekst: definirati pojmove (matematičke termine gdje god se oni pojavljuju), predstaviti temu (odabranu krivulju), odlučiti se za postupak objašnjavanja, odnosno prepušten je vlastitoj kreativnosti i misaonom slijedu.

Pripreme za pisanje eseja

Budući da je esej oblik pisanog izražavanja, zamolila sam profesora koji učenicima predaje hrvatski jezik za pomoć u pripremi učenika. Profesor Hrvoje Magdić dao je učenicima formalne upute: podsjetio ih je na to da esej mora imati uvodni dio, razradu teme i zaključak te ograničio broj riječi na 500–600 (ta su mjerila slična onima koja se primjenjuju za pisanje eseja na državnoj maturi). Kolega mi je pružio stručnu pomoć također i pri pregledu i ocjenjivanju gotovih radova jer sam predviđjala da se svakako vrednuje i pismenost učenika.

Učenici su dobili i kratke sadržajne upute kako bi znali što se od njih traži: napomenula sam im da je potrebno definirati odabranu krivulju, matematički je opisati i potražiti primjere primjene u svakodnevnom životu. Na taj način jedan dio eseja upire se o činjenice iz gradiva obrađenog na satovima (tada još znanje učenika o tome gradivu nije bilo i provjerenom) i u tome sam dijelu očekivala rekapitulaciju obrađenoga gradiva. U dijelu u kojem se traži da učenici pronađu primjere primjene uputila sam ih na korištenje literature i mrežnih stranica.

Za pisanje zaključka nisu dobili posebne upute već su u potpunosti bili slobodni oblikovati ga prema svojem stavu o temi.

Učenički eseji

Rezultati su bili vrlo zanimljivi! Učenici koji su skloni matematici duže su se zadržali na matematičkom opisu krivulja, spominjući također položaj pravca i krivulje (dakle, oslonili su se na gradivo). Služili su se bilješkama s predavanja, u uvodnom dijelu nisu posezali za literaturom, već su se zadovoljili brzim prelaskom na matematički opis teme. Tip uvoda za koji su se najčešće odlučivali bio je vrlo sličan diskursu matematičkih udžbenika: brzi prelazak "in medias res", u središtu zanimanja je definicija, a zatim i opis odnosa prema drugim relevantnim matematičkim temama.

Učenici koji su pak skloniji društvenim predmetima dali su samo najnužnije matematičke podatke i vrlo brzo napustili su matematička objašnjenja te su se posvetili potrazi za primjenom krivulja u svakodnevnom životu.

Pronalazak primjene krivulja odražava i njihove interese. Koristili su se znanjem iz likovne umjetnosti (povijesnoumjetničke arhitekture), sporta, geografije, fizike. Pronalazili su krivulje u primjerima grafičkog dizajna, marketinškim porukama, putanjama vožnje automobila, načinima parkiranja vozila i sl.

U esejima većine učenika veza između matematike i drugih predmeta ostala je najčešće samo na prepoznavanju, iako je bilo i ponešto radova u kojima je ona i matematički objašnjena. Učenici su većinom kumulativno nabrajali primjere koje su prepoznali, smatrajući priloženu sliku dovoljnim dokazom iz kojega se vidi primjena određene krivulje, tj. kao da je samo po sebi razumljivo da će čitatelj u tlocrtu Stonehengea vidjeti koncentrične kružnice, a u tlocrtu pulske Arene elipse.

Tako primjerice učenica Nataša Belančić o primjeni hiperbole piše:

...arhitekt Oscar Niemeyer oblik hiperbole upotrijebio je pri projektiranju katedrale u Braziliji (slika 1). Ovu crkvu jednom od najposebnijih na svijetu čini



Slika 1.

16 identičnih betonskih stupova savijenih upravo u oblik ove krivulje. Također, kao primjere primjene hiperbole u arhitekturi možemo navesti i Kobe Tower u Japanu (slika 2) te McDonnell Planetarium u St. Louisu, Missouri (slika 3), djelo arhitekta Obate.



Slika 2.

Učenica Inka Kirasić na sličan način piše pak o primjeni elipse:

Elipsa je krivulja koju susrećemo na svakom koraku u svakodnevnom životu, a najzastupljenija je u arhitekturi. Veliki broj arena je eliptičnog oblika pa tako i Arena u Puli. Etrušćanski grobovi također su eliptičnog oblika. U razdoblju baroka elipsa je u



Slika 3.



Slika 4.

potpunosti zamijenila krug (npr. u tlocrtu crkve Vierzehnheiligen u Bambergu u Njemačkoj vidljive su tri uzdužno povezane elipse). Crkva sv. Marije Magdalene u Selima kraj Siska ima eliptičnu kupolu, a u obliku elipse postavljene su i Berninijeve kolonade na Trgu sv. Petra u Rimu. Elipsa se može dobiti i presjekom valjka ravninom koja nije paralelna s ravninom baze, a to je vidljivo na građevini Znanstvenog i svemirskog centra u Edmontonu u Kanadi i Tycho Brahe Planetarijuma u Copenhagenu (slika 4). Pogledamo li oko sebe, primijetiti ćemo elipsu kao zaštitni znak mnogih tvrtki (Toyota, Samsung, Ford, Podravkina Vegeta (slika 5))...

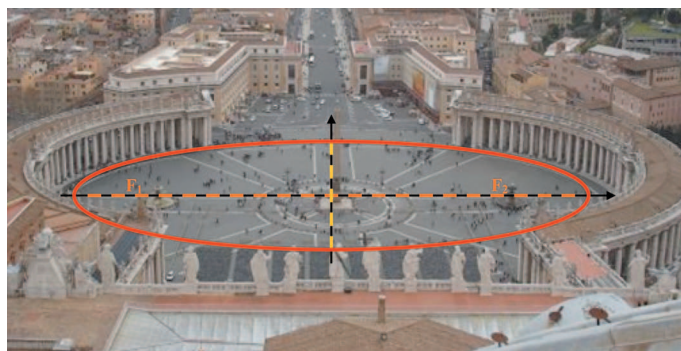
Cjelovito objašnjenje koje bi (npr. uz određenje da je tlocrt Arene elipsa) obuhvaćalo i pokušaj njezina skiciranja, postavljanje u koordinatni sustav i provjeru kroz stvarne podatke koji se mogu doznati u literaturi ili na mrežnim stranicama, dali su tek poneki učenici.

Takav način obrade teme primijenio je u svojem eseju učenik Tomislav Radočaj, koji kaže:

...elipsa se uspjela probiti i u umjetnost. Najznačajniji i najmonumentalniji takav primjer je zasigurno Trg sv. Petra u Rimu. Talijani su narod koji se ima ponositi brojnim stvarima, a jedna od njih je sigurno arhitekt i kipar, Gian Lorenzo Bernini. On je zamislio ovaj trg kao veliku elipsu sa središtem u točki u koju je smjestio 25 m visok obelisk (slika 6)... Najveći promjer elipse zove se velika os (2a) i u ovom slučaju ima duljinu od 196 m. Najmanji promjer elipse, na trgu on iznosi 148 m i vertikalna je na pročelje istoimene bazilike, zove se mala os (2b). Polovina velike osi naziva se velika poluos elipse (a), a polovina male osi naziva se mala poluos elipse (b). Udaljenosti rubnih točaka trga od obeliska u središtu međusobno su različite, što je potpuno u duhu baroka... Svaka elipsa ima dva fokusa (F_1 i F_2) pa tako i ovaj trg. U točke fokusa Bernini je postavio dvije fontane koje ispunjaju i čine prostor



Slika 5.



Slika 6.

simetričnim. Fontane (F_1 i F_2) leže na velikoj osi elipse i jednako su udaljene od obeliska, odnosno središta elipse, za udaljenost koju nazivamo linearni ekscentricitet (e). Iz toga zaključujemo da je njihova međusobna udaljenost jednaka $2e$. Iz formule za linearni ekscentricitet $e^2 = a^2 - b^2$ možemo izračunati tu udaljenost koja iznosi 64.25 m... Smjestimo li Trg sv. Petra u koordinatni sustav s obeliskom u ishodištu i tako da se osi elipse poklapaju s koordinatnim osima, moći ćemo mu odrediti jednadžbu. Budući da jednadžba elipse u kanonskom obliku glasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a poznate su nam i velika te mala poluos elipse ($a = 98$ m, $b = 74$ m), tražena jednadžba glasit će $\frac{x^2}{9604} + \frac{y^2}{5476} = 1$.

Ocjenjivanje eseja

Učenički eseji vrednovani su dvjema ocjenama. U suradnji s profesorom hrvatskoga jezika radovi su ocijenjeni s obzirom na poštovanje pravopisnih i gramatičkih normi hrvatskoga standardnog jezika, dok sam ja ocjenjivala matematički dio. Na ocjenu je utjecalo koliko su učenici pokazali matematičkog znanja u primjeni na primjerima. Samo prepoznavanje i navođenje primjera ocijenjeno je kao dobar rezultat, a kao vrlo dobar i odličan svaki daljnji pokušaj elaboriranja, objašnjavanja, skiciranja i matematičkog modeliranja primjera. Ukupna ocjena eseja bila je aritmetička sredina ocjene profesora hrvatskoga jezika i moje ocjene. Učenici su, što se tiče jezičnog izražavanja, poštovali matematičke termine, točno ih upotrebljavali, a pokazali su i uspjeh u pokušaju primjene matematičkog diskursa (stila sastavljanja matematičkih udžbenika).

Esej je pisan kod kuće. Iako sam ga htjela provesti u školi, to ovoga puta nije bilo tehnički izvedivo. Da je bilo moguće esej pisati na nastavi, ocjenu bih učinila u rubriku *Usvojenost i razumijevanje sadržaja*, ali budući da su ga pisali kao domaću zadaću, ocjena je bila unesena u prostor za bilješke nastavnika.

Pisanje takva tipa eseja na nastavi podrazumijevalo bi pripremu učenika na način da im se najavi tema i da im se omogućiti dovoljno vremena za samostalno istraživanje potrebnih podataka. Potom, na

sat pisanja učenici bi donijeli samo slike i stvarne dimenzije primjera koje su pronašli, a sve skice i matematičke izvode trebali bi napraviti na nastavi, primjenjujući znanje iz matematike.

Završna misao

Zadavanjem takva tipa zadatka htjela sam postići da učenici pronađu matematičke sadržaje u drugim predmetima ili u promatranju svakodnevice.

Učenički radovi pokazali su da su učenici sposobni pronaći dodirne točke pri povezivanju sadržaja različitih nastavnih predmeta i matematike, ali kada ih treba dosljedno objasniti, u tome uspijevaju ipak samo rijetki. Iako su učenici prvi put bili suočeni s ovakvim tipom zadatka, stanoviti uspjeh u njegovu izvršenju nije izostao. Rezultati su pokazali da su učenici spremno i zainteresirano prionuli radu, unatoč tome što ih je ometao nedostatak uvježbanosti: kroz nastavni plan i program naime nisu dovoljno poticani na povezivanje i primjenu znanja koje očigledno posjeduju, kao ni na izražavanje o matematičkim temama u formi dužega teksta, zadatka esejskoga tipa. Stoga je takav tip zadatka, u kojem su učenici trebali svoje znanje i iskustvo izvan matematike povezivati s matematičkim znanjem, te se pritom i izražavati diskursom matematičke literature bio važan korak u ostvarivanju korelacijsko-integracijskog pristupa u nastavi. K tome taj je zadatak na nov način potaknuo i one učenike koji su više skloni društveno-humanističkim predmetima i koje matematika do sada nije uspjela zainteresirati u fundamentalnom smislu. O dobroj prihvaćenosti takva načina rada nisam mogla zaključiti na temelju općih i kratkih zaključaka koje su učenici donosili u svojim esejima. U zaključku su naime najčešće pisali tek da je matematika prisutna svugdje oko nas, ali je često takvom ne doživljavamo i ne primjećujemo – učenica Mirjana Vezmar tako piše: *“Za mene je elipsa nešto apstraktno, neopipljivo i kontinuirano. Njezin oblik uvijek sam smatrala elegantnim, a njezina zatvorena krivulja uvijek me asocirala na nešto beskonačno.”* Stoga sam se ugodno iznenadila kad su naši izvannastavni razgovori pokazali da učenici i dalje žele razgovarati o temi krivulja, nastavljajući pronalaziti nove i nove primjere u svakodnevnom životu.